

Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 64-2008

# **Numerische Untersuchung der akustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen**

von

Dirk Clasen

Institut für Angewandte Mechanik

Technische Universität Braunschweig

Herausgegeben vom Mechanik-Zentrum der  
Technischen Universität Braunschweig

Schriftleiter: Prof. Dr. rer. nat. H. Antes

Institut für Angewandte Mechanik  
Postfach 3329  
38023 Braunschweig

Tel.: 0531 / 391-7101  
Fax: 0531 / 391-5843

Von der Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig  
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

Tag der Einreichung: 27.06.2007  
Tag der Prüfung: 14.04.2008

Berichter:  
Prof. Dr.-Ing. S. Langer  
Prof. Dr.-Ing. O. von Estorff

©Copyright 2008 D. Clasen, Braunschweig

BSM 64-2008  
ISBN 978-3-920395-63-0

Alle Rechte, insbesondere der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.  
Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise zu vervielfältigen.

## **Zusammenfassung**

Die Bevölkerung Deutschlands ist dem Lärm durch eine Vielzahl von Schallquellen ausgesetzt. Straßen, Schienenwege, Flugplätze, Gewerbeanlagen, Sportanlagen und nicht zuletzt Nachbarn führen häufig zu Lärmproblemen. Auf Grund dieser immer stärker werdenden Lärmbelastungen gewinnt die Berechnung der Schalldämmung zunehmend an Bedeutung. Dabei spielt die Erfassung von beliebigen geometrischen, bauphysikalischen und bauakustischen Randbedingungen eine entscheidende Rolle.

Oftmals wird der Nachweis über eine ausreichende Schalldämmung mit Hilfe von Messungen erbracht, die jedoch kostenintensiv sind und die Herstellung eines Prototypen erfordern, an dem die Messungen durchgeführt werden können. Eine rechnergestützte Untersuchung kann diesen Nachweis kostengünstiger und schneller erbringen. Zu diesem Zweck wird in der Arbeit ein Berechnungsmodell vorgestellt, das in der Lage ist, die Schalltransmission durch im Hochbau übliche Wandkonstruktionen zu bestimmen und alle dabei auftretenden dynamischen Wechselwirkungsvorgänge berücksichtigt. Das vorgestellte Modell beschreibt das Körperschallverhalten von trennenden und flankierenden Bauteilen, die angrenzenden Luftschallfelder sowie die Interaktion zwischen Körper- und Luftschall. Auf Basis der berechneten Werte ist es möglich, die für eine schallschutztechnische Auslegung benötigten Kennwerte wie z.B. das Schalldämm-Maß oder das Stoßstellendämm-Maß zu ermitteln.

Zur Bestimmung dieser Größen ist das Schwingungsverhalten der Bauteile, die Ausbreitung von Schall in der Luft sowie deren gegenseitige Interaktion zu modellieren. Für das Schwingungsverhalten der Bauteile sind die Biegebewegung sowie die inplane Schwingung entscheidend. Die Biegebewegung der Bauteile wird mit Hilfe der Mindlinschen Plattentheorie beschrieben. Durch die elastische, dynamische Scheibengleichung werden die inplanen Wellen im Modell erfasst. Stoßstellen wie z.B. Wandknoten werden mit Hilfe eines Feder-Dämpfer-Modells abgebildet, dessen Parameter durch Messungen bestimmt wurden. Im Hochbau übliche zweischalige Wandkonstruktionen enthalten in der Regel schallabsorbierende Füllstoffe. Zur Modellierung derartiger Materialien werden zwei Modelle vorgestellt und miteinander verglichen. Der erste Ansatz beschreibt derartige Materialien über einen äquivalenten Fluidansatz. Alternativ kann die Beschreibung über ein dreidimensionales poroelastisches Kontinuum erfolgen. Die Schallausbreitung im akustischen Fluid wird mit der Helmholtzgleichung erfasst. Durch eine strenge Kopplung wird die Interaktion von Körper- und Luftschall realisiert.

Für die numerische Umsetzung des Modells wird die Finite Elemente Methode (FEM) verwendet, die sich sehr gut zur diskreten Beschreibung abgeschlossener Gebiete eignet. Bei der Untersuchung von flankierenden Bauteilen spielt auch die Abstrahlung des Schalls in unendlich ausge dehnte Fluidgebiete eine wichtige Rolle. Derartige Gebiete werden mit Hilfe der Scaled Boundary Finite Element Method (SBFEM) im Berechnungsmodell berücksichtigt.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Anwendung des vorgestellten Modells zur Untersuchung verschiedener konstruktiver Einflussfaktoren auf die Schall- und Längsdämmung von im Hochbau üblichen Wandkonstruktionen sowie der Untersuchung des Einflusses von Stoßstellen z.B. an Wandknoten. Abschließend werden die Ergebnisse der numerischen Simulation mit Messergebnissen verglichen, die zueinander eine gute bis sehr gute Übereinstimmung aufweisen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass das entwickelte Modell zur Berechnung der akustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen ein geeignetes Werkzeug zur Ermittlung der für die schallschutztechnische Bewertung notwendigen Kenngrößen ist. Daher ist es für die Bewertung von verschiedenen Konstruktionen im Rahmen der Entwurfsphase von Bauwerken geeignet.

## **Abstract**

The population of Germany is exposed to noise by several sources. Roads, railway tracks, airports, industrial facilities, sports facilities and also neighbours lead to harassment by noise. Due to increasing noise exposure the computation of sound insulation is crucial. The coverage of arbitrary geometrical boundary conditions as well as physics related to construction play a decisive role. The verification of sufficient sound insulation is mostly done by measurement. This approach is cost-intensive and requires the construction of a prototype on which the measurement is accomplished. A computerised investigation may be cheaper and faster. Therefore, in this work a numerical model will be presented that is able to analyse the sound transmission through typical wall setups. This model also incorporates all interaction phenomena between the several treated domains. The proposed model describes the propagation of structureborne sound within separating and flanking walls. It also incorporates the propagation of airborne sound in the adjoint fluid domains and the interaction between the structureborne and the airborne sound. Based upon the computed values a constructing engineer is able to determine all characteristic values needed for an estimate on the sound insulation of a building.

In order to compute these values, the vibration behavior of the walls, the propagation of sound in air and their interaction must be described. The bending waves and the inplane waves are essential for a proper modelling of the vibrational behaviour of the walls. Mindlin's plate theory is used to describe the bending vibration whereas the elastic, dynamic equation for panels includes the inplane vibrations. Junctions between several walls are represented using a spring-damper-model whose parameters are determined by measurement. In general, double-leaf walls contain a filling consisting of a sound absorbing material. Such materials are constituted using either an equivalent fluid approach or a detailed three dimensional model based upon Biot's theory. The sound propagation within the acoustical fluid is described by the Helmholtz equation. A strong coupling procedure covers the interaction of structureborne and airborne sound.

The numerical implementation of the model uses the Finite Element Method. This method is well suited for the discretisation of enclosed domains. If the sound transmission through flanking walls is investigated, the radiation of sound into infinite fluid domains must be considered. Such domains are treated within the numerical model using the Scaled Boundary Finite Element Method. Main focus of this work is the application of the proposed model for examining different constructive factors on the sound insulation and the flanking sound insulation of typical wall setups. The influence of joints on these two typical acoustic properties is also studied. Finally, the results of the numerical simulation are compared to measurements. These results show good agreement to each other.

Summarising it can be stated that the proposed model for the computation of the acoustic properties of separating and flanking walls is a useful tool for the evaluation of typical wall setups in an early stage of design of a building.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Stand der Forschung . . . . .	2
1.2	Zielsetzung . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Schalldämmung und Längsdämmung im Hochbau</b>	<b>8</b>
2.1	Verfahren zur Bestimmung des Schalldämm-Maßes . . . . .	11
2.1.1	Analytische Modelle zur Abschätzung des Schalldämm-Maßes . . . . .	11
2.1.1.1	Einschalige Bauteile . . . . .	11
2.1.1.2	Mehrschalige Bauteile . . . . .	14
2.1.2	Messung des Schalldämm-Maßes . . . . .	16
2.1.3	Berechnung des Schalldämm-Maßes . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>19</b>
3.1	Modellbildung . . . . .	19
3.2	Körperschall in plattenförmigen Bauteilen . . . . .	21
3.2.1	Dichtewellen . . . . .	22
3.2.2	Dehnwellen . . . . .	22
3.2.3	Schubwellen . . . . .	23
3.2.4	Biegewellen . . . . .	23
3.2.5	Grenzfrequenz und Koinzidenzeffekt . . . . .	25
3.3	Wellenausbreitung im idealen, kompressiblen Fluid . . . . .	26
3.3.1	Das akustische Randwertproblem . . . . .	27
3.3.2	Eindeutigkeit von akustischen Randwertproblemen . . . . .	28
3.3.3	Randbedingungen des Fluids an dessen Begrenzungsflächen . . . . .	29
3.4	Modellierung der Struktur . . . . .	32
3.4.1	Schwingungen einer Mindlin-Platte . . . . .	32
3.4.2	Orthotrope Materialien . . . . .	37
3.5	Kopplung von akustischem Fluid und elastischer Struktur . . . . .	38
3.6	Modellierung verlustbehafteter Medien . . . . .	39
3.6.1	Viskoses Fluid . . . . .	40
3.6.2	Strukturdämpfung . . . . .	41
3.7	Modellierung poröser Medien . . . . .	43

<b>4</b>	<b>Numerische Umsetzung</b>	<b>48</b>
4.1	FEM für die Wellenausbreitung in akustischen Fluiden . . . . .	49
4.1.1	Schwache Form . . . . .	49
4.1.2	Diskretisierung . . . . .	50
4.1.3	Fehlerabschätzung . . . . .	52
4.1.4	Gleichungslöser . . . . .	52
4.2	FEM für die Struktur . . . . .	53
4.2.1	FE Formulierung für plattenartige Bauteile . . . . .	53
4.2.2	Künstliche Versteifungseffekte ( <i>Locking</i> ) . . . . .	54
4.2.3	DSG Stabilisierung . . . . .	55
4.2.4	FE Formulierung für scheibenartige Tragwerke . . . . .	56
4.2.5	Ebenes Schalenelement . . . . .	58
4.3	Kopplung von akustischem Fluid und elastischer Struktur . . . . .	58
4.4	Poroelastische Strukturen . . . . .	59
4.5	Kopplung poroelastischer Strukturen mit verschiedenen Medien . . . . .	60
4.5.1	Kopplung mit einer elastischen Struktur . . . . .	60
4.5.2	Kopplung mit einem akustischen Fluid . . . . .	61
4.6	Behandlung infiniter Gebiete . . . . .	62
4.6.1	Randelementmethode . . . . .	62
4.6.1.1	Schallausbreitung im Halbraum . . . . .	65
4.6.2	Scaled Boundary Finite Elemente Methode . . . . .	66
4.6.2.1	Grundgleichungen der SBFEM . . . . .	67
4.6.2.2	Asymptotische Erweiterung . . . . .	70
4.6.2.3	Padé Approximation . . . . .	71
4.7	Kopplung finiter und infiniter Gebiete . . . . .	72
4.7.1	Kopplung der FEM mit der REM . . . . .	72
4.7.2	Kopplung der FEM mit der SBFEM . . . . .	73
4.8	Programmtechnische Umsetzung . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Zweidimensionale Modellierung bauakustischer Probleme</b>	<b>78</b>
5.1	Schubweicher Balken zur Modellierung elastischer Strukturen . . . . .	78
5.2	Zweidimensionale Formulierung für das akustische Fluid . . . . .	80
5.3	Kopplung zwischen Fluid und Struktur für den zweidimensionalen Fall . . . . .	81
5.4	Anwendungsbereich der zweidimensionalen Formulierung . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Verifikationsbeispiele</b>	<b>82</b>
6.1	Eigenmoden eines Raumes . . . . .	82
6.2	Eigenfrequenzen einer quadratischen Platte . . . . .	83
6.3	Eigenfrequenzen eines eingespannten Kastens . . . . .	84
6.4	Kopplung von akustischem Fluid und elastischer Struktur . . . . .	85
6.5	Kopplung finiter und infiniter Gebiete . . . . .	87
6.6	Untersuchung der Konvergenz der Padé Approximation . . . . .	89
6.7	Impedanz an der Oberfläche einer infiniten Schicht porösen Materials . . . . .	91
6.8	Raum mit einer von porösem Material bedeckten Seitenwand . . . . .	93

<b>7</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	<b>97</b>
7.1	Modellmesstechnik . . . . .	97
7.1.1	Ähnlichkeitstheorie . . . . .	98
7.1.2	Aufbau des Modells zur Untersuchung des Schalldämm-Maßes . . . . .	99
7.1.3	Aufbau des Modells zur Untersuchung der Längsdämmung . . . . .	100
7.2	Einfluss der Fluiddämpfung auf die Schall- und die Längsdämmung . . . . .	101
7.3	Schalldämmung einer zweischaligen Wand . . . . .	103
7.3.1	Vergleich des äquivalenten Fluidansatzes und der (u,p)-Formulierung zur Beschreibung poröser Füllstoffe . . . . .	106
7.4	Einfluss der Flankenübertragung auf die Schalldämmung von trennenden Bauteilen	110
7.4.1	Dreidimensionales Modell . . . . .	116
7.5	Längsdämmung flankierender Bauteile . . . . .	118
7.5.1	Messergebnisse . . . . .	118
7.5.2	Simulationsergebnisse . . . . .	120
7.5.3	Vergleich mit einem dreidimensionalen Modell . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>128</b>
<b>A</b>	<b>Approximation der Dämpfungsparameter im poroelastischen Modell nach Biot</b>	<b>131</b>
<b>B</b>	<b>Anhand von Messungen identifizierte Materialparameter</b>	<b>133</b>
B.1	Parameter für Acrylglas . . . . .	133
B.2	Parameter für Silikon . . . . .	134
<b>C</b>	<b>Verzeichnis der verwendeten Symbole</b>	<b>135</b>



# 1 Einleitung

Neben den konstruktiven und ästhetischen Gesichtspunkten sollten beim Entwurf moderner Bauwerke verstärkt auch bauphysikalische Gesichtspunkte berücksichtigt werden, um die Wohnqualität zu verbessern. Dabei spielt der Schutz der Bewohner vor Lärm in jüngerer Zeit eine immer größer werdende Rolle, da zu starke Lärmbelastungen gravierende Konsequenzen für die Gesundheit haben. Zahlreiche Studien belegen eindeutig, dass alltäglicher Lärm nicht nur die Kommunikation behindert sondern auch die Konzentrationsfähigkeit mindert, wodurch die Lern- und Leistungsfähigkeit signifikant herabgesetzt wird. Des Weiteren werden Erholung und Entspannung der Bewohner beeinträchtigt, ggf. treten sogar Schlafstörungen auf, wodurch das Herz-Kreislaufsystem zusätzlich negativ beeinflusst wird [189]. Die Bewohner von Gebäuden sind somit vor unzumutbaren Belästigungen durch Schall zu schützen, um derartige gesundheitliche Beeinträchtigungen zu vermeiden. Zur Verbesserung des Wohnkomforts ist zudem die Privatsphäre sicher zu stellen. Der Schutz vor Außenlärm als auch vor Lärmeinwirkungen innerhalb des Gebäudes aus angrenzenden Wohnungen oder gewerblichen Betrieben sowie infolge haustechnischer Anlagen hat einen sehr hohen Stellenwert. Der ausreichende Schallschutz, der den Menschen vor unzumutbarem Lärm schützen soll, wird durch die gesetzlichen Anforderungen und Nachweise der DIN 4109 - Schallschutz im Hochbau [59] festgelegt. Ebendort finden sich auch Vorschläge für einen erhöhten Schallschutz, der den gestiegenen Ansprüchen des Nutzers Rechnung trägt und heutzutage immer eingehalten werden sollte.

Bereits in sehr frühen Planungsphasen von Gebäuden wird ein effektives Werkzeug benötigt, mit dessen Hilfe konkrete Aussagen über das Schalldämmverhalten von Bauteilen gemacht werden können. Aufgrund der zahlreichen Wechselwirkungsbeziehungen zwischen unterschiedlichsten Materialien, Bauelementen und der Umgebung sollten Variationen der relevanten Einflussfaktoren schnell und effektiv untersucht werden können. Derzeit werden jedoch zumeist Messungen und Vergleiche mit als geeignet anerkannten Ausführungen für den Nachweis der ausreichenden bzw. der erhöhten Schalldämmung verwendet. Diese Verfahren erweisen sich jedoch aufgrund der hohen Kosten als auch des immensen Zeitaufwandes als eher ungeeignet, um eine Vielzahl verschiedener Konstruktionen zu analysieren. Daher entsteht vermehrt der Wunsch, das bauakustische Verhalten von trennenden und flankierenden Bauteilen mit Hilfe numerischer Verfahren zu untersuchen. Ziel dieser Arbeit ist es, ein effizientes Werkzeug für die Berechnung der Schallausbreitung in Räumen sowie die Schalltransmission durch Wandkonstruktionen unter Berücksichtigung der Wechselwirkungen von Wänden und angrenzender Luft zu entwickeln, um dann die Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen analysieren zu können. Durch ein derartiges Werkzeug könnten sowohl kostenintensive Messungen an Prototypen als auch nachträgliche Sanierungsmaßnahmen zur Verbesserung des Schallschutzes reduziert werden. Dies würde zur einer signifikanten Reduzierung der Baukosten von Gebäuden führen.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen die bauakustischen Eigenschaften von trennenden und flankie-

renden Bauteilen untersucht werden. Dabei liegt der Fokus auf der Bestimmung des Schalldämm-Maßes sowie des Längs-Schalldämm-Maßes von praxisrelevanten Konstruktionen. Daher wird ein Verfahren entwickelt, dass die Ausbreitung von Schall sowohl in Luft als auch in Festkörpern beschreibt und den Schalldurchgang durch trennende und flankierende Bauteile modelliert. Dieses Modell beinhaltet zudem sämtliche dynamischen Wechselwirkungseffekte zwischen dem Festkörper und der Luft.

## 1.1 Stand der Forschung

Die Untersuchung von Schalltransmissionsvorgängen ist ein gekoppeltes Mehrfeldproblem. Elastische verformbare Bauteile, die als ebene Flächentragwerke beschrieben werden können, treten an ihrer Oberfläche mit der angrenzenden Luft in Interaktion. Das Gebiet, in dem die Luft vorhanden ist, kann sowohl ein abgeschlossener Raum einer Wohnung sein als auch ein unendlich ausgedehntes Gebiet außerhalb eines Gebäudes. Den Fall des abgeschlossenen Fluids bezeichnet man auch als Innenraumproblem. Der zweite Fall hingegen ist ein sogenanntes Außenraumproblem.

Da in der Regel keine analytischen Lösungen zur Bestimmung der Schalltransmission existieren, müssen andere Methoden wie beispielsweise Diskretisierungsverfahren zur Problemlösung herangezogen werden. Dabei ist eine Kopplung des Modells für die Struktur mit dem akustischen Fluid Luft erforderlich. Diese Kopplung kann sowohl in schwacher als auch in strenger Form erfolgen (vgl. Abschnitt 3.5).

Ziel der Untersuchungen ist die Bestimmung bauakustisch relevanter Kenngrößen wie des Schalldämm-Maßes oder der Längsdämmung, die in DIN 4109 bzw. der neuen europäischen Norm DIN EN 12354 definiert sind und ausführlich in Abschnitt 2 beschrieben werden. Diese Kenngrößen können dann zum Vergleich einzelner Konstruktionen untereinander als auch für den Nachweis des ausreichenden Schallschutzes nach den beiden zuvor genannten Normen verwendet werden.

Die numerische Simulation der einzelnen Teilgebiete sowie der Wechselwirkungen untereinander kann mit einer Vielzahl von Berechnungsverfahren durchgeführt werden. Diese Verfahren werden in diesem Abschnitt vorgestellt und diskutiert. Für die Auswahl eines geeigneten Verfahrens sind die Erfordernisse der Problemstellung zu berücksichtigen sowie die jeweiligen Vor- und Nachteile der zur Verfügung stehenden Verfahren abzuwägen.

Die Finite Elemente Methode (FEM) hat aufgrund ihrer Vielseitigkeit Einzug in die unterschiedlichsten Gebiete der Natur- und Ingenieurwissenschaften gehalten. So können lineare bzw. nicht-lineare Theorien für Material und Verformung verwendet oder auch komplexeste Geometrien modelliert und analysiert werden [22, 209]. Zudem besitzt die FEM einige rechentechnische Vorteile. So sind sämtliche Matrizen in der Regel symmetrisch und das Gleichungssystem schwach besetzt. Des Weiteren besitzt dieses Gleichungssystem häufig eine Bandstruktur. Derzeit ist die FEM im Bereich der Strukturanalyse das am weitesten verbreitete und meist genutzte numerische Näherungsverfahren.

Zudem kann mit Hilfe der FEM auch die Helmholtz-Gleichung gelöst und somit die Schalldruckverteilung in einem akustischen Fluid näherungsweise berechnet werden. Für die Betrachtung von akustischen Innenraumproblemen ist die FEM ein geeignetes Verfahren [196, 209]. Die früheste Arbeit zu diesem Thema stammt von Cederfeldt [36]. Einen Überblick über die aktuellen Entwicklungen auf dem Gebiet bietet der Artikel von Thompson et al. [186], der auch auf die Behandlung unendlicher Gebiete und Gebietszerlegungsverfahren eingeht.

Die FEM ist jedoch nicht das einzige Verfahren zur Berechnung abgeschlossener Gebiete. Ein weiterer Ansatz besteht in der Verwendung wellenbasierter Ansatzfunktionen [58]. Bei diesem Verfahren wird bei der Wahl der verwendeten Ansatzfunktionen bereits der Wellencharakter der Lösung berücksichtigt. Dadurch reduziert sich die Anzahl der benötigten Elemente im Vergleich zur FEM signifikant. Allerdings steigt der Aufwand für die numerische Integration innerhalb der Elemente. Einen ähnlichen Ansatz verfolgen die spektralen Elemente [53] sowie die *Partition of Unity Method* (PUM) [17], bei der ebenfalls spezielle Ansatzfunktionen verwendet werden. Ähnlich wie für die wellenbasierten Ansätze erhöhen sich auch für die PUM und die spektralen Elemente die nötigen Integrationsordnungen. Dies macht ggf. den Einsatz spezieller Quadraturformeln nötig oder beeinflusst die Stabilität des Verfahrens durch eine schlechte Konditionierung des Gleichungssystems [145]. Alvarez et al. haben eine diskontinuierliche Finite Elemente Formulierung für Helmholtzprobleme vorgestellt [6], die die  $C^0$ -Kontinuität über die Elementgrenzen hinweg in einer schwachen Form herstellt. In Abhängigkeit zweier Parameter, deren Werte die Effizienz des Verfahrens sehr stark beeinflussen, wird das Verfahren auf ein- und zweidimensionale Probleme angewandt. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Verwendung der *Least Squares Finite Element Methods* (LSFEM) [89, 144, 185]. Hierbei wird versucht, die globale Lösung des Problems durch eine Reihe von Lösungen im Element zu bestimmen, indem zusätzlich die Kontinuität der Lösung über die Elementgrenzen hinaus mit einem numerischen Verfahren angenähert werden soll. Die Sprünge in der Lösung sowie der Ableitung der Lösung werden hierbei mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate minimiert [141, 175]. Jedoch verschlechtert sich durch Erhöhung der Anzahl der Basisfunktionen je Element die Kondition des Gesamtgleichungssystems. Die *Ultra Weak Variational Formulation* (UWVF) von Huttunen [99] eignet sich für die effiziente Behandlung von Helmholtzproblemen bei hohen Frequenzen. Sie verwendet ebenfalls diskontinuierliche Lösungen auf Elementebene, um eine globale Lösung zu bestimmen. Im Rahmen dieser Lösung wird die Kontinuität zwischen den einzelnen Elementen der Diskretisierung über Impedanzrandbedingungen sichergestellt. Im Gegensatz zur LSFEM kann für die UWVF die globale Konvergenz bewiesen werden. Für die Betrachtung unendlich ausgedehnter Gebiete kann ein *Perfectly Matched Layer* (PML) an die UWVF angebunden werden [100]. Eine Formulierung für elastodynamische Probleme existiert ebenfalls [101].

Alternativ zur FEM kann die Randelementmethode (REM) als Diskretisierungsverfahren verwendet werden. Die REM kann sowohl für die Modellierung der Struktur [39, 78, 159] als auch zur Modellierung der angrenzenden Luft genutzt werden [132, 106, 190]. Allerdings ist dieses Vorgehen für die Analyse komplexer mehrschaliger Wandaufbauten weniger geeignet, da im Allgemeinen keine geeignete Fundamentallösung zur Verfügung steht. Diese Fundamentallösung ist Voraussetzung für das Verfahren. Ist für das zu untersuchende physikalische Problem keine Fundamentallösung bekannt, kann die REM nicht zur Lösung dieses Problems verwendet werden. Bei der Behandlung von Schallausbreitungsproblemen in unendlich ausgedehnten Gebieten besitzt die REM jedoch den Vorteil, dass sie die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung [171] implizit erfüllt. Diese Bedingung stellt das Auslaufen der Wellen im Unendlichen sicher und verhindert eine Reflexion dieser Wellen an den künstlichen Gebietsrändern, die durch den Abbruch der Diskretisierung wie z.B. bei der FEM entstehen.

Daher wird oft eine Kombination von FEM und REM eingesetzt, wobei die FEM in der Regel zur Beschreibung der Struktur und die REM für das angrenzende unendlich ausgedehnte Fluidgebiet verwendet wird. Beispiele für diesen Ansatz finden sich bei McCulloch und von Estorff [133] sowie Coyette [44, 45, 43]. Im Rahmen ihrer Untersuchungen kommt ein spezielles, besonders effektives Randelementmodell zum Einsatz, bei der die zu untersuchende Struktur in ei-

ner unendlich ausgedehnten Ebene (Baffle) eingespannt ist. Langer verwendet zur Simulation der Schalltransmission durch Isolierverglasungen ein vollständig gekoppeltes Modell [123, 122]. Zur Beschreibung von Innenraumproblemen sowie der Struktur wird die FEM verwendet, das Außenraumproblem wird mittels REM analysiert.

Neben der REM existieren eine Vielzahl von Verfahren für die Berechnung von Schallfeldern in unendlich ausgedehnten Gebieten, die die Einhaltung der Sommerfeldschen Abstrahlungsbedingung sicherstellen sollen. Beispiele hierfür sind infinite Elemente [27, 28], *Dirichlet-to-Neumann* (DtN) Randbedingungen [80], absorbierende Randbedingungen [85] oder *Perfectly Matched Layers* (PML) [26, 1, 192, 90]. Eine Übersicht und Vergleich der einzelnen Verfahren findet sich z.B. bei Givoli [83, 82], Tsynkov [191] oder Thompson [186]. Der einfachste Ansatz besteht jedoch in dem Vorgeben einer Impedanz an der künstlichen Begrenzung des Diskretisierungsgebietes, die der von Luft entspricht. Dieses Verfahren ist nicht reflektierend für Schallwellen, die senkrecht auf den durch das Abbrechen der Diskretisierung geschaffenen Rand des betrachteten Gebietes auftreffen. Es ist jedoch sicher zu stellen, dass der Abstand zwischen der künstlichen Begrenzung und der abstrahlenden Oberfläche ausreichend groß ist.

Für die Berechnung der akustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen ist die Berücksichtigung der Wechselwirkungen zwischen dem Fluid Luft und der Struktur sehr wichtig. Die frühen Ansätze zur Kopplung der beiden Teilgebiete Fluid und Struktur basieren auf dem Prinzip der virtuellen Arbeiten [46]. Zur Reduktion des numerischen Aufwandes wurden jedoch nur zweidimensionale Fragestellungen untersucht und nur zwei bis drei Teilgebiete miteinander gekoppelt. Ein weiterer Ansatz verwendet für die Beschreibung beider Teilgebiete die gleichen Freiheitsgrade, so dass z.B. für den Fall einer Verschiebungsformulierung die Teilgebiete direkt knotenweise gekoppelt werden können [24, 86]. Das Fluid kann jedoch über verschiedene Formulierungen beschrieben werden. Alternativ zur üblichen Druckformulierung sind auch Formulierungen verwendet worden, die auf der Schnelle, den Fluidverschiebungen oder verschiedenen Potentialen wie z.B. dem Schnelle- oder Verschiebungspotential beruhen. Zudem existieren auch gemischte Formulierungen [198], die sich aus Verschiebung und Druck zusammensetzen. So vergleicht Sandberg drei Kopplungsformulierungen miteinander, die auf einer Druck-, einer Verschiebungs- und einer Verschiebungspotentialformulierung für das Fluid beruhen [158]. Formulierungen für das Fluid, die auf vektoriellen Größen wie der Verschiebung basieren, bieten den Vorteil, dass sie sich leicht in FEM Programme für strukturdynamische Probleme implementieren lassen, da die Kopplung der Freiwerte beider Teilgebiete direkt und knotenweise erfolgen kann. Allerdings erhöht sich die Anzahl der Unbekannten im Gesamtgleichungssystem sehr stark, da nun im dreidimensionalen Fall mindestens drei Freiwerte je Knoten existieren. Bei einer Druckformulierung existiert hingegen nur ein Freiheitsgrad je Fluidknoten. Zudem ist die Rotationsfreiheit des Fluids über zusätzliche Bedingungen sicher zu stellen. Die Rotationsfreiheit ist in einer Druckformulierung hingegen implizit erfüllt, allerdings sind zusätzlich Terme für die Kopplung der Teilgebiete zu berücksichtigen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Druckformulierung für das Fluid verwendet. Des Weiteren werden die einzelnen Teilgebiete knotenweise gekoppelt. Dieses Vorgehen vereinfacht die Implementierung der Kopplung der Teilgebiete. Es existieren jedoch auch Ansätze, die die Verwendung verschiedener und vollständig voneinander unabhängiger Diskretisierungen für die einzelnen Teilgebiete ermöglichen. Ein möglicher Ansatz ist die Verwendung von Mortar-Methoden [201, 74]. Bei der Kopplung von Fluid und Struktur erfolgt die Formulierung analog zu der in Abschnitt 3.5 vorgestellten Methode. Allerdings ist die Implementierung dieses Verfahren deutlich komplexer als der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Ansatz.



Ein alternatives Verfahren für die Untersuchung der Schalltransmission ist die Statistische Energie Analyse (SEA). Dieses Verfahren wurde von Crocker und Price [51] bereits 1969 für bauakustische Fragestellungen verwendet. In der jüngeren Literatur finden sich zahlreiche Arbeiten von Craik et al. [49, 48, 47] zu diesem Thema.

Im Rahmen der SEA wird das Gesamtsystem in Subsysteme unterteilt, die deutlich größere Ausmaße besitzen als die Elemente der FEM oder REM. Als Zustandsgrößen zur Beschreibung dieser Subsysteme dienen die in den Subsystemen gespeicherte Energie sowie die zwischen den Subsystemen ausgetauschte Energie. Dieser Energieaustausch wird mit Hilfe von Kopplungsverlustfaktoren  $\eta_{ij}$  beschrieben, die aus probabilistischer Sicht als Erwartungswerte für einen Energieaustausch zwischen den Subsystemen  $i$  und  $j$  aufgefasst werden können. Die Beschreibung von Verlusten innerhalb eines Subsystems  $j$  erfolgt durch Dämpfungsverlustfaktoren  $\eta_j$ . Da in der SEA das Gesamtsystem in relativ große Subsysteme unterteilt wird, ist sowohl die Rechenzeit als auch der Speicherbedarf für derartige Simulationen vergleichsweise gering.

Bei der Berechnung von mehrschaligen Bauteilen zeigen sich jedoch die Grenzen der SEA [150]. Für eine realistische Beschreibung der akustischen Transmission sind mehrere sogenannte indirekte Pfade erforderlich. Dadurch werden jedoch einige Grundannahmen der SEA verletzt, die einen rein resonanten Energietransfer voraussetzen. Somit kann die SEA für derartige Untersuchungen nicht uneingeschränkt angewendet werden. Problematisch ist zudem die Bestimmung der Kopplungsverlustfaktoren, die wiederum mittels numerischer Verfahren wie z.B. FEM oder durch Messungen zu bestimmen sind. Des Weiteren eignet sich dieses Verfahren nur für größere Frequenzen, da die modale Dichte ausreichend groß sein muss. Weitere Nachteile des Verfahrens sind, dass nur eine schwache Kopplung der Subsysteme berücksichtigt wird und vor allem keine Aussagen über die lokale Schalldruckverteilung gemacht werden kann [70]. Zudem ist das Verfahren inkompatibel zu den weit verbreiteten Elementverfahren FEM und BEM. Allerdings existieren inzwischen Ansätze, die eine Kopplung der SEA mit diesen Verfahren ermöglichen [197].

Für die Untersuchung bauakustischer Probleme hat sich der Einsatz von Elementverfahren wie FEM oder REM bewährt. Auch eine Kombination der beiden Verfahren kann für eine Vielzahl von Anwendungsfällen sinnvoll sein [123, 122]. Bereits 1976 wurde von Craggs et al. die Schallübertragung zwischen zwei Räumen numerisch untersucht [46]. Sowohl für die Luft als auch das Trennbauteil wurde damals die FEM verwendet. Die untersuchten Problemstellungen waren aufgrund der eingeschränkten Rechnerkapazität allerdings nur zweidimensional. Mehra verwendet in [134] ebenfalls Finite Elemente zur Berechnung der Luftschalldämmung von einschaligen Trennbauteilen. Allerdings werden die angrenzenden Luftschichten nicht diskretisiert, so dass dieses Modell keinerlei Rückwirkungseffekte oder die Einflüsse der angrenzenden Räume berücksichtigt. Einen ähnlichen Ansatz verfolgen Brunskog et al. [33] zur Untersuchung von Gipskartonständerwänden. Zur Beschreibung des Luftschalls werden Cosinus Funktionen verwendet, die implizit die schallharten Randbedingungen an den Randflächen des Raumes erfüllen. Die Diffusität des anregenden Luftschallfeldes wird durch eine Monte-Carlo Methode sichergestellt. Der Einfluss der Räume wird somit nur vereinfacht erfasst, allerdings reicht der betrachtete Frequenzbereich bis rund 700 Hz. Poröse Absorbermaterialien im Hohlraum der untersuchten zweischaligen Konstruktionen werden mit Hilfe eines äquivalenten Fluids berücksichtigt. Dieses Modell wurde von Champoux und Allard vorgeschlagen und wird in Abschnitt 3.7 genauer vorgestellt. In [79] untersuchten Gibbs und Maluski das Schalldämm-Maß von Trennwänden zwischen zwei Räumen. Betrachtet wurden sowohl massive einschalige Trennwände als auch mehrschalige Konstruktionen. Dazu verwendeten sie einen ähnlichen Ansatz wie Brunskog et al. [33]. Sie betrachteten ebenfalls den Einfluss der Lagerung der Trennwand und verglichen ihre Simulationsergebnisse mit

Messungen. Diese Untersuchungen wurden jedoch nur für sehr tiefe Frequenzen bis rund 200 Hz durchgeführt. Mit Hilfe eines vollständig gekoppelten FE-Modells für die Trennwand und die beiden Räume untersuchten die gleichen Autoren den Schalldurchgang zwischen zwei benachbarten Räumen [130]. Allerdings führten sie ihre Berechnungen ebenfalls nur für sehr niedrige Frequenzen bis 200 Hz durch. Das Schalldämm-Maß von zweischaligen Gipskartonständerwänden wurde von Davidsson ebenfalls mit Hilfe einer vollständig gekoppelten FE-Formulierung untersucht [55]. Der untersuchte Frequenzbereich erstreckte sich von 40 bis 200 Hz und es wurden verschiedene Wandaufbauten und Füllmaterialien untersucht. Dabei zeigte sich, dass sich für ähnliche Abmessungen des Sende- und des Empfangsraumes das Schalldämm-Maß deutlich verschlechterte. Diese symmetrische Konfiguration hat jedoch große praktische Relevanz, da in vielen Fällen z.B. Badezimmer oder Küchen zweier benachbarter Wohneinheiten direkt aneinander liegen. Derartige Konfigurationen wurden daher auch von Sommerfeld durch Messungen eingehend untersucht [172]. So ergaben sich für die bauüblichen Geometrien rund 1 dB schlechtere Werte für das bewertete Schalldämm-Maß als für übliche Prüfstandsgeometrien. Im tieferen Frequenzbereich nahm zudem die Standardabweichung der Luftschalldämm-Maße signifikant zu. Des Weiteren war unterhalb der Koinzidenzfrequenz nochmals ein starker Einbruch zu beobachten. Ackermann verwendet ebenfalls ein vollständig gekoppeltes Modell zur Berechnung der Schalltransmission [2]. Er untersucht das Verhalten von einschaligen sowie zweischaligen Konstruktionen, wobei poröse Materialien im Hohlraum mittels eines äquivalenten Fluidansatzes berücksichtigt werden. Mauerwerkswände werden ebenfalls untersucht. Durch einen Homogenisierungsansatz werden dazu gemittelte Materialparameter ermittelt, die dann als orthotrope Materialparameter in die Berechnung eingehen. Ähnliche Untersuchungen wurden von Panneton et al. [149, 147] durchgeführt. Im Rahmen dieser Arbeiten wurden zwei Modelle zur Beschreibung des porösen Materials zwischen den beiden endlichen Schalen miteinander verglichen. Allerdings wurden auch hier die angrenzenden Räume nicht mittels FEM diskretisiert, wodurch die gegenseitigen Rückwirkungen nicht im Modell berücksichtigt wurden.

## 1.2 Zielsetzung

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein Berechnungsverfahren entwickelt werden, mit dessen Hilfe die Schalltransmission durch trennende und flankierende Bauteile berechnet werden kann. Dieses Modell soll sämtliche relevanten physikalischen Vorgänge und Einflussfaktoren berücksichtigen. Das Berechnungsverfahren soll das Körperschallverhalten des trennenden bzw. des flankierenden Bauteils abbilden, sowie das Schallfeld im betrachteten Gebiet liefern. Mit Hilfe dieser Daten soll ein Konstrukteur dann in der Lage sein, bereits in der Entwurfsphase eines Gebäudes sämtliche für eine schallschutztechnische Auslegung relevanten Kenngrößen schnell, effektiv und kostengünstig ermitteln und ggf. optimieren zu können. Dadurch soll die Anzahl der kostenintensiven und zeitraubenden Prüfstandmessungen reduziert und sinnvoll ergänzt werden.

In Kapitel 2 werden die grundlegenden Begriffe und Normen eingeführt, die die Grundlage für die in den folgenden Kapiteln durchgeführten Untersuchungen bilden. Der Schwerpunkt liegt hierbei auf der Schalldämmung von Trennbauteilen sowie der Längsdämmung von flankierenden Bauteilen. Des Weiteren werden vorhandene analytische und numerische Modelle, die für die Abschätzung der Schalldämmung geeignet sind, vorgestellt und grundlegende physikalische Phänomene der Schalldämmung an einfachen Ersatzsystemen betrachtet.

In Kapitel 3 werden dann die Grundlagen der Modellbildung erläutert, die für die Untersuchung

der oben genannten Fragestellungen benötigt werden. Nachdem die beschreibenden Gleichungen vorgestellt und diskutiert wurden, wird auf Basis der differentiellen Problembeschreibung der einzelnen Teilgebiete eine vollständig gekoppeltes Gesamtgleichungssystem zur Modellierung von Schalltransmissionsvorgängen hergeleitet, dass sämtliche Wechselwirkungen der Teilgebiete untereinander erfasst. Bei der Beschreibung von Schalltransmissionsvorgängen spielt die Berücksichtigung von Dämpfung eine wesentliche Rolle. Sowohl für das Fluid Luft als auch für die betrachteten Bauteile werden daher Möglichkeiten vorgestellt, Dämpfung im Modell zu berücksichtigen. Mit Hilfe dieses Modells soll dann der Einfluss verschiedener Dämpfungsfaktoren auf die bauakustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen genauer untersucht werden.

Die numerische Umsetzung des in Abschnitt 3 vorgestellten Modells erfolgt in Kapitel 4. Wie zuvor bereits erwähnt, wird zur Berechnung der Schalldruckverteilung im abgeschlossenen akustischen Fluid sowie zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens der elastischen Struktur die Finite Elemente Methode verwendet. Die Wechselwirkungen zwischen diesen beiden Gebieten werden mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen (PvV) formulierten Kopplung im numerischen Modell berücksichtigt. Um den Einfluss poröser Füllstoffe, die in mehrschaligen Konstruktionen zu finden sind, analysieren zu können, werden zwei numerische Modelle vorgestellt, welche in der Lage sind, derartige Konstruktionen zu beschreiben. Da bei der Untersuchung der Schalltransmission durch flankierende Bauteile die Schallabstrahlung in unendlich ausgedehnten akustische Fluide eine wichtige Rolle spielt, werden im Abschnitt 4.6 die Grundlagen der Randelementmethode sowie der *Scaled Boundary Finite Element Method* beschrieben. Diese beiden Verfahren erfüllen die Sommerfeldsche Abstrahlungsbedingung und verhindern somit, dass Schallwellen an den künstlichen Abbruchrändern der Diskretisierung in das Berechnungsgebiet zurückreflektiert werden. Abschließend werden in Abschnitt 4.8 Details zur Implementierung des entwickelten Finite Elemente Löser besprochen.

Da der Rechenzeitbedarf für dreidimensionale Modelle im Vergleich zu einer zweidimensionalen Modellierung sehr stark ansteigt, wird in Abschnitt 5 eine zweidimensionale Formulierung zur Simulation bauakustischer Problemstellungen eingeführt. Die Struktur wird mittels schubweicher Balken, die auf der Theorie nach Timoschenko basieren, beschrieben. Für das akustische Fluid gelten die gleichen Annahmen wie in Abschnitt 4.1. Die Kopplung zwischen dem akustischen Fluid und der elastischen Struktur wird analog zu Abschnitt 3.5 mit Hilfe des PvV hergestellt.

Nachdem in Kapitel 6 das vorgestellte numerische Modell an zahlreichen Verifikationsbeispielen getestet wurde, werden zum Abschluss der Arbeit in Kapitel 7 verschiedene Anwendungsbeispiele untersucht. Das vollständig gekoppelte Simulationsmodell wird zur Untersuchung verschiedener Dämpfungsfaktoren, die die bauakustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen unterschiedlich stark beeinflussen, verwendet.

## 2 Schalldämmung und Längsdämmung im Hochbau

Die Bevölkerung in Deutschland ist dem Lärm durch eine Vielzahl von Schallquellen ausgesetzt. Straßen, Schienenwege, Flugplätze, Gewerbeanlagen, Sportanlagen und nicht zuletzt Nachbarn führen häufig zu Lärmproblemen bei den Betroffenen. In Tabelle 2.1 ist das Ergebnis einer Onlineumfrage des Umweltbundesamtes zusammengestellt [193]. Danach fühlen sich 62% der Be-

Lärmquelle	Gestört oder belästigt
Straßenlärm	62%
Nachbarn	47%
Flugverkehr	38%
Industrie/Gewerbe	26%
Schienenverkehr	22%

Tabelle 2.1: Umfrageergebnis des Umweltbundesamtes aus dem Jahr 2006

fragten durch Straßenlärm gestört, 47% klagen über Lärmbelästigung durch ihren Nachbarn. Das Problem Schallschutz wird jedoch in weiten Teilen der Bevölkerung noch sehr vernachlässigt. Bei einer im Jahr 2002 vom Informationszentrum Beton durchgeführten Haushaltsbefragung wurden rund 2600 Haushalte nach den Kriterien gefragt, die für sie beim Neubau eines Hauses wichtig sind. Dabei nannten 30% die Anzahl und Größe der Räume, 24% wünschen sich einen Balkon oder Garten und 15% legten größeren Wert auf die Art und die Größe des Hauses. Bauphysikalische Aspekte wie Wärme- und Schallschutz wurden nur von 5% der Befragten als wichtig erachtet. Eine Umfrage unter Hausbesitzern zeigte jedoch ein anderes Bild. Nach der Wärmedämmung, mit der 49% der Befragten Probleme haben, war die Schalldämmung mit 40% das meistgenannte Problem.

Insbesondere zur Verbesserung der Situation bezüglich des Verkehrslärms sind Maßnahmen zur Verringerung der Lärmemission als auch Lärmimmission notwendig. Erste Erfolge hierbei sind die Entwicklung leiserer Motoren [162], die Verringerung von Abrollgeräuschen von Kraftfahrzeugen durch modifizierte Gestaltung der Reifen [154] und Fahrbahndecken [174] sowie die verbesserte Lagerung von Schienen [184]. Alle diese aktiven Maßnahmen zur Verbesserung des Schallschutzes sind jedoch besonders in Ballungszentren nicht ausreichend, so dass zusätzlich passive Maßnahmen nötig sind. Auf Grund der örtlichen Gegebenheiten ist das Anlegen von Schallschutzwänden jedoch oft nicht möglich. Daher ist zum Schutz der Bevölkerung vor Lärm die Schalldämmung von Gebäuden zu verbessern.

Die wichtigsten Kenngrößen zur Beschreibung des Schalldämmverhaltens eines Bauteils sind nach [61] das Schalldämm-Maß  $R$  und das Bau-Schalldämm-Maß  $R'$ . Beide Kenngrößen sind frequenzabhängig. In Abbildung 2.1 sind die möglichen Übertragungswege von Luftschall zwischen zwei benachbarten Räumen nach DIN EN 12354 [61] dargestellt. Von einer Schallquel-

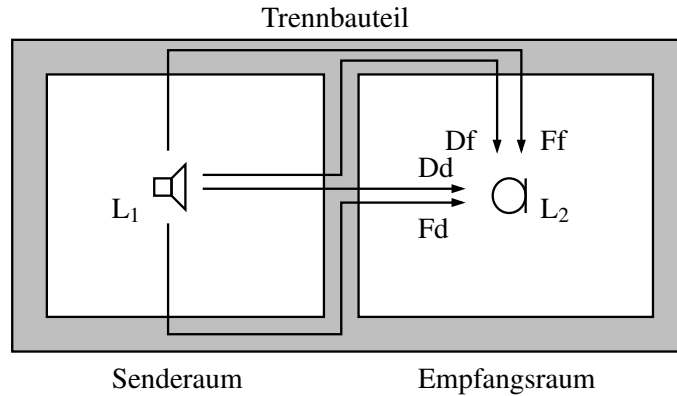


Abbildung 2.1: Übertragungswege des Luftschalls zwischen zwei benachbarten Räumen nach DIN EN 12354 [61]

le im Senderraum werden Schallwellen abgestrahlt. Diese Schallwellen treffen sowohl direkt auf das Trennbauteil, das zwischen beiden Räumen liegt, als auch auf die flankierenden Wände und Decken. Die auftreffenden Schallwellen erzwingen in diesen Bauteilen Schwingungen, die sich als verschiedene Wellentypen, auf die in Kapitel 3.2 näher eingegangen wird, ausbreiten. Im Empfangsraum strahlen diese Wellen dann wieder Körperschall ab, der dann als Luftschall auf den Empfänger trifft. Das Schalldämm-Maß  $R$  lässt sich beispielsweise mit Hilfe von Messungen aus der Differenz der Schallpegel im Senderraum  $L_1$  und Empfangsraum  $L_2$  bestimmen. Zur Bestimmung des Bau-Schalldämm-Maßes  $R'$

$$R' = L_1 - L_2 + 10 \lg \frac{S}{A} \text{ [dB]} \quad (2.1)$$

ist nach DIN EN 12354 zusätzlich ein Korrekturfaktor zu addieren. Dieser berechnet sich aus der äquivalenten Absorptionsfläche  $A \text{ [m}^2\text{]}$  und der Fläche des Trennbauteils  $S \text{ [m}^2\text{]}$ . Mit Hilfe dieses Korrekturfaktors kann das Schalldämm-Maß unabhängig von den lokalen Gegebenheiten des Prüfstandes angegeben werden, wodurch der Vergleich von in verschiedenen Prüfständen ermittelten Schalldämm-Maßen ermöglicht wird. Der Schallpegel ist nach [61] als

$$L = 20 \lg \frac{\tilde{p}}{p_0} \text{ [dB]} \quad (2.2)$$

definiert.  $\tilde{p}$  ist der Effektivwert des Schalldrucks, der sich für harmonische Schwingungen zu  $\tilde{p} = |p|/\sqrt{2}$  ergibt und  $p_0 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$  ist der Bezugsschalldruck, der der Hörschwelle des Menschen entspricht. Der mittlere Schalldruckpegel eines Raumes lässt sich für eine diskrete Anzahl  $n$  von Schalldrücken, z.B. die Schalldrücke an verschiedenen Messpunkten, durch

$$L = 10 \lg \frac{\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + \dots + \tilde{p}_n^2}{np_0^2} \quad (2.3)$$

ermitteln.

Die nach DIN EN 12354 erforderlichen Nachweise über eine ausreichende Schalldämmung können durch Vergleiche mit als geeignet anerkannten Ausführungen geführt werden. Dies geschieht

entweder nur durch Berechnungen oder auch in Kombination mit Messungen. Zur Vereinfachung der Handhabung werden diese Nachweise jedoch vorwiegend über das bewertete Schalldämm-Maß  $R_w$  geführt

$$R_w \geq R_{w,soll}, \quad (2.4)$$

wobei der ermittelte Einzahlwert  $R_w$  größer oder gleich dem Referenzwert  $R_{w,soll}$  nach DIN EN 12354 sein muss. Das bewertete Schalldämm-Maß  $R_w$  ist eine Einzahlangabe, die durch einen

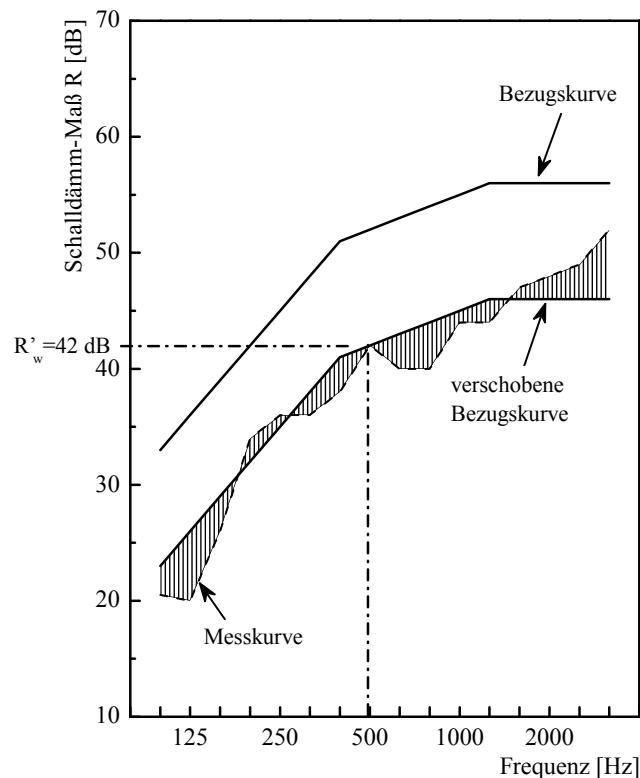


Abbildung 2.2: Beispiel für die Bestimmung eines bewerteten Schalldämm-Maßes  $R_w$

Vergleich der Schalldämmkurve mit einer ebenfalls frequenzabhängigen Sollkurve ermittelt wird [63]. Diese Sollkurve beschreibt den idealisierten Verlauf des Schalldämm-Maßes einer 25 cm dicken Vollziegelwand und ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Das bewertete Schalldämm-Maß  $R_w$  ergibt sich durch gedankliches Verschieben der Schalldämmkurve, so dass die Summe der Unterschreitungen durch die frequenzabhängige Schalldämmkurve so groß wie möglich ist, jedoch maximal 32,0 dB für die Werte der 16 Terzbänder erreicht. Dies entspricht jeweils einer zulässigen Unterschreitung von 2 dB. Das bewertete Schalldämm-Maß kann dann als Wert der verschobenen Bezugskurve bei 500 Hz abgelesen werden (vgl. Abbildung 2.2).

Im Rahmen der Berechnung nach DIN 4109 wird der Einfluss flankierender Bauteile durch Korrekturwerte berücksichtigt. Für eine Haustrennwand muss das bewertete Schalldämm-Maß beispielsweise 57 dB betragen. Allerdings sehen Vorschläge für einen erhöhten Schallschutz 67 dB vor, wobei bei diesem Wert zusätzlich zum Schutz vor Lärm auch dem Komfort der Bewohner Rechnung getragen wird.

Allerdings können durch die Angabe von Einzahlwerten im Allgemeinen keine eindeutigen Rückschlüsse auf die subjektive Geräuschwahrnehmung von Menschen und das physikalische Verhalten gemacht werden, da völlig unterschiedliche Frequenzverläufe auf den gleichen Wert führen können [166]. Des Weiteren geht durch die Ermittlung des Einzahlwertes ein Großteil der Information verloren. Allerdings kann dieser Einzahlwert als ein erster Schritt zur Berücksichtigung psychoakustischer Effekte angesehen werden.

## 2.1 Verfahren zur Bestimmung des Schalldämm-Maßes

In den nun folgenden Abschnitten sollen verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt werden, mit deren Hilfe das Schalldämm-Maß von Bauteilen bestimmt werden kann. Dabei wird insbesondere auf Verfahren eingegangen, die nicht auf einer detaillierten numerischen Simulation beruhen.

### 2.1.1 Analytische Modelle zur Abschätzung des Schalldämm-Maßes

Bereits seit Ende des 19. Jahrhunderts sind zahlreiche Ansätze und Berechnungsformeln entwickelt worden, die versuchen, das Schalldämm-Maß von verschiedensten Wandaufbauten wie beispielsweise ein- und mehrschaligen Wänden abzuschätzen. Einen detaillierten Überblick über die existierenden Modelle findet sich u.a. bei Mehra [134]. Analytische Modelle zur Bestimmung des Schalldämm-Maßes zweischaliger Konstruktionen werden von Hongisto verglichen [95]. Siebzehn Ansätze werden sowohl qualitativ als auch quantitativ an üblichen zweischaligen Konstruktionen untersucht. Dabei ergeben sich für das Schalldämm-Maß 10 bis 20 dB Abweichung im Vergleich zur Messung. Für das bewertete Schalldämm-Maß liegen die Werte rund 5 bis 15 dB von der Messung entfernt. Der Autor kommt zu dem Schluss, dass die Genauigkeit dieser analytischen Verfahren nicht ausreicht und somit verbesserte Verfahren zu entwickeln sind. Weitere analytische Ansätze findet sich z.B. bei Tadeu [179, 178], allerdings sind auch hier deutliche Abweichungen zwischen Messung und analytischer Modellierung zu erkennen.

Aus bauakustischer Sicht wird grundsätzlich zunächst zwischen einschaligen und mehrschaligen Bauteilen unterschieden. In den folgenden Abschnitten werden nur die grundlegenden physikalischen Phänomene betrachtet. Details finden sich in [50].

#### 2.1.1.1 Einschalige Bauteile

Einige der grundlegenden Phänomene des Schalldämmverhaltens einschaliger Bauteile lassen sich mit Hilfe eines Einmassenschwingers, wie er in Abbildung 2.3 dargestellt ist, beschreiben. Darin

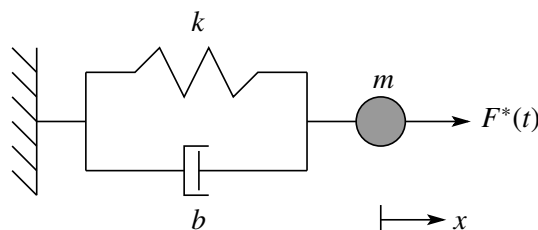


Abbildung 2.3: Einmassenschwinger mit Dämpfung; System und Belastung

ist  $m$  die Masse,  $k$  die Federkonstante und  $b$  die Dämpfungskonstante.  $F^*(t) = \hat{F} \cos(\omega t)$  beschreibt die zeitharmonische Anregung des Systems, die zu einer erzwungenen Schwingung führt. Die Bewegungsgleichung für den Einmassenschwinger nach Abbildung 2.3 lautet

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F^*(t) \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + D\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{F}}{m} \cos(\omega t) \quad (2.5)$$

wobei  $x$  die Auslenkung der Masse aus der Ruhelage beschreibt. In Gleichung (2.5) ist  $D = b/(2m)$  der Dämpfungskoeffizient bzw.  $\omega_0^2 = k/m$  die Eigenkreisfrequenz. Für die weiteren Betrachtungen werden sowohl die Anregungsfrequenz  $\omega$  als auch der Dämpfungskoeffizient  $D$  normiert, indem sie durch die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  dividiert werden. Daraus ergeben sich die dimensionslose Frequenz  $\eta$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (2.6)$$

sowie das Lehrsche Dämpfungsmaß  $\vartheta$

$$\vartheta = \frac{D}{\omega_0}. \quad (2.7)$$

Für Stahlkonstruktionen beträgt das Lehrsche Dämpfungsmaß  $\vartheta$  beispielsweise rund 0,015 oder 0,045 für Stahlbetondecken. Für Gleichung (2.5) lässt sich eine analytische Lösung angeben [77]. Diese Lösung setzt sich aus zwei Lösungsanteilen zusammen, wobei ein Teil eine freie Schwingung und der andere Teil eine erzwungene Schwingung beschreibt. Der Anteil der freien Schwingung klingt bei ausreichend großer Dämpfung  $D$  mit zunehmender Zeit ab, so dass ab einem gewissen Zeitpunkt nur noch die erzwungene Schwingung beobachtet werden kann. Der Amplitude der erzwungenen Schwingung

$$\hat{x}_\infty = \frac{\hat{F}}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4D^2\omega^2}} \quad (2.8)$$

kommt somit eine besondere Bedeutung zu. Diese Amplitude  $\hat{x}_\infty$  kann kraftnormiert zu

$$V_1(\eta, \vartheta) = \frac{\hat{x}_\infty \omega_0^2 m}{\hat{F}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\vartheta^2 \eta^2}} \quad (2.9)$$

angegeben werden. Diese Funktion  $V_1(\eta, \vartheta)$ , die als Übertragungsfunktion oder Vergrößerungsfunktion bezeichnet wird, ist für verschiedene Dämpfungsmaße  $\vartheta$  über der dimensionslosen Frequenz  $\eta$  in Abbildung 2.4 dargestellt. Für die Frequenz  $\eta = 1$  ergibt sich der Resonanzfall. Ohne Dämpfung wird das System bei dieser Frequenz zu Schwingungen mit unendlich großer Amplitude angeregt. Führt man im System jedoch Dämpfung ein, so wird die Amplitude im Resonanzfall mit größer werdender Dämpfung immer stärker abgeschwächt.

Bei einer Platte, mit der sich das Schwingungsverhalten eines einschaligen Trennbauteils beschreiben lässt, handelt es sich um ein kontinuierliches System mit einer unendlichen Anzahl von Feder-Dämpfer-Systemen. Für jedes einzelne dieser Feder-Dämpfer-Systeme lässt sich nun eine Resonanz beobachten, so dass ein derartiges kontinuierliches System eine unendliche Anzahl von Resonanzfällen aufweist, für die jeweils ein solches Maximum in der Vergrößerungsfunktion zu beobachten ist. Auch für ein solches kontinuierliches System werden durch Materialdämpfung



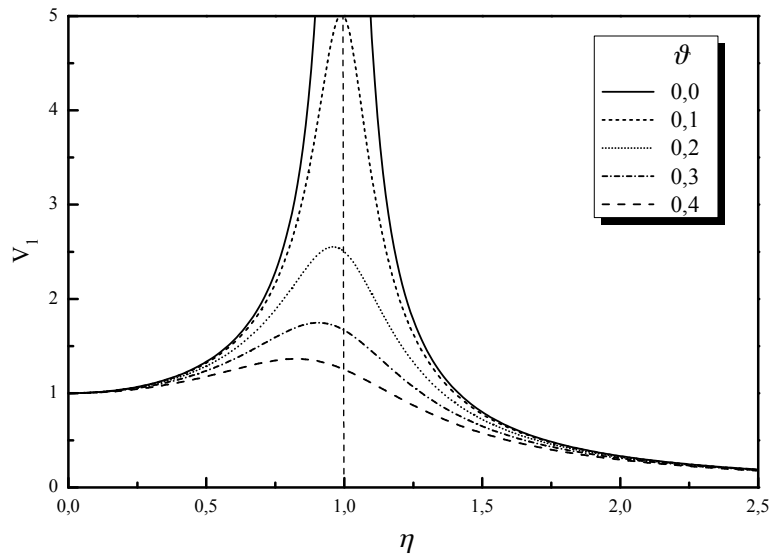


Abbildung 2.4: Vergrößerungsfunktion eines Einmassenschwingers für verschiedene Dämpfungsmaße  $\theta$  über der dimensionslosen Frequenz  $\eta$

diese Eigenfrequenzen gedämpft.

Das Schalldämmverhalten von einschaligen, homogenen und unendlich ausgedehnten Wänden kann näherungsweise mit dem Bergerschen Massengesetz

$$R = 10 \lg \left[ 1 + \left( \frac{\omega \rho_S h}{2 \rho_F c_F} \cos \theta \right)^2 \right] \text{ [dB]} \quad (2.10)$$

beschrieben werden. Darin ist  $\theta$  der Schalleinfallswinkel,  $m' = \rho_S h$  die flächenbezogene Masse der Wand,  $\rho_F$  die Dichte der Luft und  $c_F$  die Schallgeschwindigkeit der Luft. Nach Gleichung (2.10) führt eine Verdoppelung der Masse der betrachteten Wand zu einer Erhöhung des Schalldämm-Maßes um 6 dB.

Wird zusätzlich zur Masse auch die Biegesteifigkeit  $B$  der Wand berücksichtigt, kann nach [91] das Schalldämm-Maß näherungsweise zu

$$R = 10 \lg \left[ 1 + \left( \omega \rho_S h - B \omega^3 \frac{\sin^4 \theta}{c_F^4} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta}{(2 \rho_F c_F)^2} \right] \text{ [dB]} \quad (2.11)$$

bestimmt werden. In Gleichung (2.11) wird von einem zur Frequenz proportionalen Massenanteil ein Steifigkeitsanteil subtrahiert, der proportional zur dritten Potenz der Frequenz ansteigt. Die Frequenz, an der sich diese beiden Anteile gegenseitig aufheben, wird Grenzfrequenz oder Koinzidenzfrequenz  $f_c$  genannt. Es kommt zu einem starken Einbruch in der Schalldämmkurve, der jedoch durch Dämpfung, die in der Regel im System vorhanden ist, abgemindert wird. Auf dieses Phänomen wird in Abschnitt 3.2.5 detailliert eingegangen. Oberhalb der Grenzfrequenz kann der Verlauf der Schalldämmung z.B. nach [50] zu

$$R = 20 \lg \frac{\omega \rho_S h}{2 \rho_F c_F} + 10 \lg(2\eta) + 5 \lg \frac{f}{f_G} \text{ [dB]} \quad (2.12)$$

berechnet werden. Diese Formel berücksichtigt durch einen Verlustfaktor  $\eta$  auch die Dämpfung der Platte. Alle bisher genannten Modelle gehen von unendlich ausgedehnten Bauteilen aus und sind daher nur zur näherungsweisen Abschätzung der Schalldämmung von praxisüblichen, einschaligen Wänden geeignet, die endliche Abmessungen besitzen. Deren Abschätzung ist in der Regel deutlich komplizierter, da sie zumeist nicht homogen sind und die Einflüsse der Lagerung zu berücksichtigen sind. Allerdings lässt sich auch für praxisübliche Konstruktionen ein prinzipieller Verlauf der Schalldämmung angeben, der in Abbildung 2.5 dargestellt ist. Es sind vier

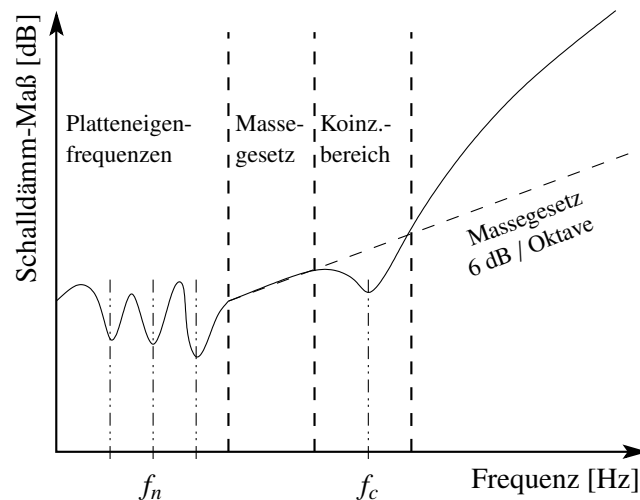


Abbildung 2.5: Charakteristischer Verlauf der Schalldämmung für einschalige Bauteile [143]

charakteristische Bereiche zu erkennen. Im unteren Frequenzbereich ist der Einfluss der Platteneigenfrequenzen dominant. Die Einbrüche in diesem Bereich werden mit zunehmender Dämpfung in der Platte deutlich geringer. Der zweite Bereich kann mit Hilfe des Bergerschen Massegesetzes (2.10) beschrieben werden. In diesem Bereich nimmt das Schalldämm-Maß mit rund 6 dB je Oktave zu. Darauf folgt dann der sogenannte Koinzidenzbereich, in dem die Koinzidenzgrenzfrequenz  $f_c$  liegt. Auch hier wird der Einbruch durch Dämpfung in der Platte deutlich abgeschwächt. Der vierte Bereich kann mit Hilfe von Gleichung (2.12) beschrieben werden.

### 2.1.1.2 Mehrschalige Bauteile

Um die Schalldämmung zu verbessern, ist nach dem Bergerschen Massegesetz (2.10) einfach die Masse der Wand zu erhöhen. Dies ist jedoch nur im eingeschränkten Rahmen eine wirtschaftliche Maßnahme. Soll die Schalldämmung kostengünstig stark verbessert werden, so geht man von der einschaligen auf die zweischalige Bauweise über. Dadurch lassen sich sowohl Gewicht als auch Materialkosten einsparen und der Raumbedarf senken. Die Schalldämmung von unendlich ausgedehnten zweischaligen Wänden wird ausführlich von Fahy analysiert [69]. Für praxisübliche Konstruktionen gibt es Untersuchungen von Kropp et al. [117].

In Abbildung 2.6 ist ein zweischaliges Bauteil dargestellt. Dieses zweischalige Bauteil besteht aus zwei Platten, die einen gewissen Abstand zueinander haben. Der so entstehende Hohlraum ist in der Regel eine Luftschicht oder wird mit Dämmmaterial gefüllt. Neben dem schematischen Aufbau ist in Abbildung 2.6 auch das mechanische Ersatzsystem skizziert. Die beiden Platten des zweischaligen Aufbaus können als Massen verstanden werden, die mit einer Feder verbunden sind. Die Feder bildet den Einfluss der zwischen den Platten liegenden Luftschicht bzw. des

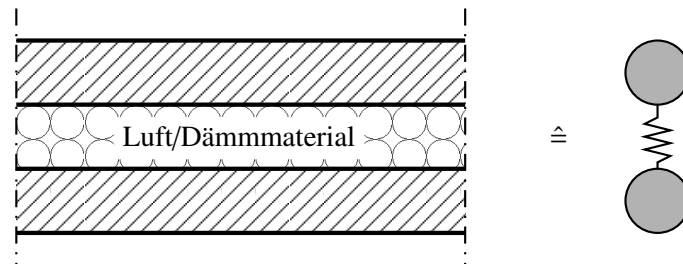


Abbildung 2.6: Zweischaliges Bauteil und dessen mechanisches Ersatzsystem bestehend aus zwei Massen und einer Feder

Dämmmaterials ab. Der Resonanzfall dieses Ersatzsystem wird auch als Masse-Feder-Masse Resonanz bezeichnet. Bei dieser Masse-Feder-Masse Resonanz handelt es sich um die Frequenz, bei der die beiden Schalen mit maximaler Amplitude unter Zusammendrückung der Luftschicht gegeneinander schwingen. Dieser Effekt führt zu einer Verschlechterung der Luftschalldämmung im Bereich dieser Resonanzfrequenz  $f_0$ . In der Bauakustik wird dieser Effekt auch als Koppelresonanz bezeichnet. Die Größe der Frequenz  $f_0$  ist abhängig von der Masse der Einzelschalen sowie dem Abstand der Schalen zueinander. Für einen größeren Abstand reduziert sich die Steifigkeit der Feder des Ersatzsystems. Die Eigenfrequenzen des Systems verschieben sich in den tieferen Frequenzbereich. Die Hohlraumresonanzen  $f_H$  sind ebenfalls abhängig vom Abstand der Schalen und sind auf die Eigenschwingungen des Hohlraums zurückzuführen.

In Abbildung 2.7 ist zum Vergleich gegenüber einer einschaligen Konstruktion das Schalldämm-Maß einer zweischaligen Konstruktion über der Frequenz dargestellt. Im Vergleich zu einschaligen

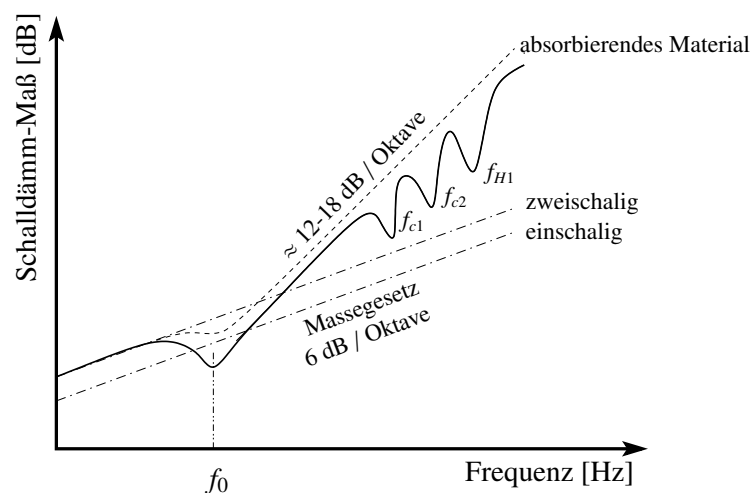


Abbildung 2.7: Charakteristischer Verlauf der Schalldämmung für zweischalige Bauteile [143]

Konstruktionen gibt es grundsätzlich zwei Unterschiede. In der Nähe der Masse-Feder-Masse Resonanz  $f_0$  bricht, wie zuvor erwähnt, die Schalldämmung ein. Gleiches gilt für den Bereich der Hohlraumresonanzen  $f_H$ . Auch hier sind deutliche Einbrüche im Schalldämm-Maß zu erkennen. Der positive Einfluss von in den Hohlraum eingebrachtem absorbierendem Material ist ebenfalls in Abbildung 2.7 zu erkennen. Sowohl die Einbrüche in der Nähe der Grenzfrequenzen der beiden Schalen und der Masse-Feder-Masse Resonanz als auch der Hohlraumresonanzen werden deutlich

gedämpft.

Für Wandaufbauten, die aus zwei Schalen bestehen, tritt eine deutliche Verbesserung des Schalldämm-Maßes erst oberhalb der Masse-Feder-Masse Resonanz  $f_0$  auf und dies auch nur für den Fall, dass die beiden Schalen voneinander entkoppelt sind. Ziel praxisüblicher Konstruktionen ist es daher, diese Resonanzfrequenz unter 100 Hz zu führen, damit über den gesamten bauakustisch relevanten Frequenzbereich eine Verbesserung der Schalldämmung vorliegt. Jede mechanische Kopplung der beiden Schalen wie beispielsweise durch Ständerwerk von leichten Trennwänden aus Gipskarton oder bei zweischaligen Mauerwerkswänden über Mörtelbrücken verringern die Schalldämmung signifikant. Derartige Schallbrücken sollten durch Sorgfalt sowohl bei der Bauplanung als auch der Bauausführung vermieden werden [167].

### 2.1.2 Messung des Schalldämm-Maßes

Die Messverfahren zur Bestimmung des Schalldämm-Maßes sind sowohl in der deutschen [59] als auch der europäischen Norm [61] detailliert festgeschrieben. Dabei kann die Messung sowohl in bauakustischen Laboratorien, die in der Regel über nebenwegfreie Prüfstände verfügen, als auch in-situ erfolgen, wobei hier die Flankenübertragung berücksichtigt wird. Für Innenwände eignet sich das in Abbildung 2.1 dargestellte sog. Zweiraumverfahren. Hier befindet sich das Prüfobjekt zwischen zwei Räumen. Dabei erzeugen im Senderraum geeignete Lautsprecher ein diffuses, stationäres Luftschallfeld. Die Schalldruckpegel werden dann an unterschiedlichen Positionen in beiden Räumen mit Mikrofonen gemessen und dann sowohl zeitlich als auch räumlich gemittelt. Der nach Gleichung (2.1) zur Bestimmung des Bau-Schalldämm-Maßes  $R'$  nötige Korrekturfaktor wird dann mit der Sabineschen Formel

$$T = 55,3 \frac{V}{A \cdot c_F} = 0,163 \frac{V}{A} \text{ [s]} \quad (2.13)$$

berechnet. Dazu wird zunächst die Nachhallzeit  $T$  gemessen und dann mittels des bekannten Luftvolumens  $V$  des Empfangsraumes die äquivalente Absorptionsfläche  $A$  bestimmt, die dann direkt in Gleichung (2.1) eingeht.

Handelt es sich bei dem Prüfobjekt um eine Außenwand, kann die Anregung ebenfalls durch einen Luftschalllautsprecher oder auch durch Verkehrslärm erfolgen. In diesem Fall wird allerdings der mittlere Schalldruckpegel an der Außenseite der Wand direkt an der Oberfläche des Prüfobjekts gemessen. Möglich ist auch die Verwendung eines sog. Intensitätsverfahrens [62].

Sowohl in der europäischen als auch der deutschen Norm werden detaillierte Anforderungen an die Prüfobjekte und deren Einbau in den Teststand, an die Messräume, an die Messapparatur, an die Positionen der Lautsprecher und Mikrofone, an die Durchführungen der Messungen, usw. gestellt. Dadurch soll sichergestellt werden, dass alle Prüflabore repräsentative Ergebnisse erzielen und die statistische Streuung der Messergebnisse minimiert wird. Trotz all dieser Vorgaben weichen die Messungen einzelner Labore teilweise jedoch stark voneinander ab. In Abbildung 2.8 sind die Ergebnisse eines Ringversuchs der Physikalisch Technischen Bundesanstalt (PTB) abgebildet. Im Rahmen dieses Ringversuchs haben zwölf deutsche Messlabore das Schalldämm-Maß einer jeweils in ihrem eigenen Labor aufgebauten Kalksandsteinwand von 24 cm Dicke und einer flächenbezogenen Masse von  $440 \text{ kg/m}^3$  bestimmt. Trotz genauester Vorgaben unterscheiden sich die Messergebnisse einzelner Prüflabore jedoch um bis zu 8 dB - im tiefen Frequenzbereich ist die Streuung der Messergebnisse teilweise noch größer [165, 135, 121, 73]. Als eine der Ursachen für die zum Teil starken Abweichungen werden Dämpfungsmechanismen vermutet. Der Einfluss der

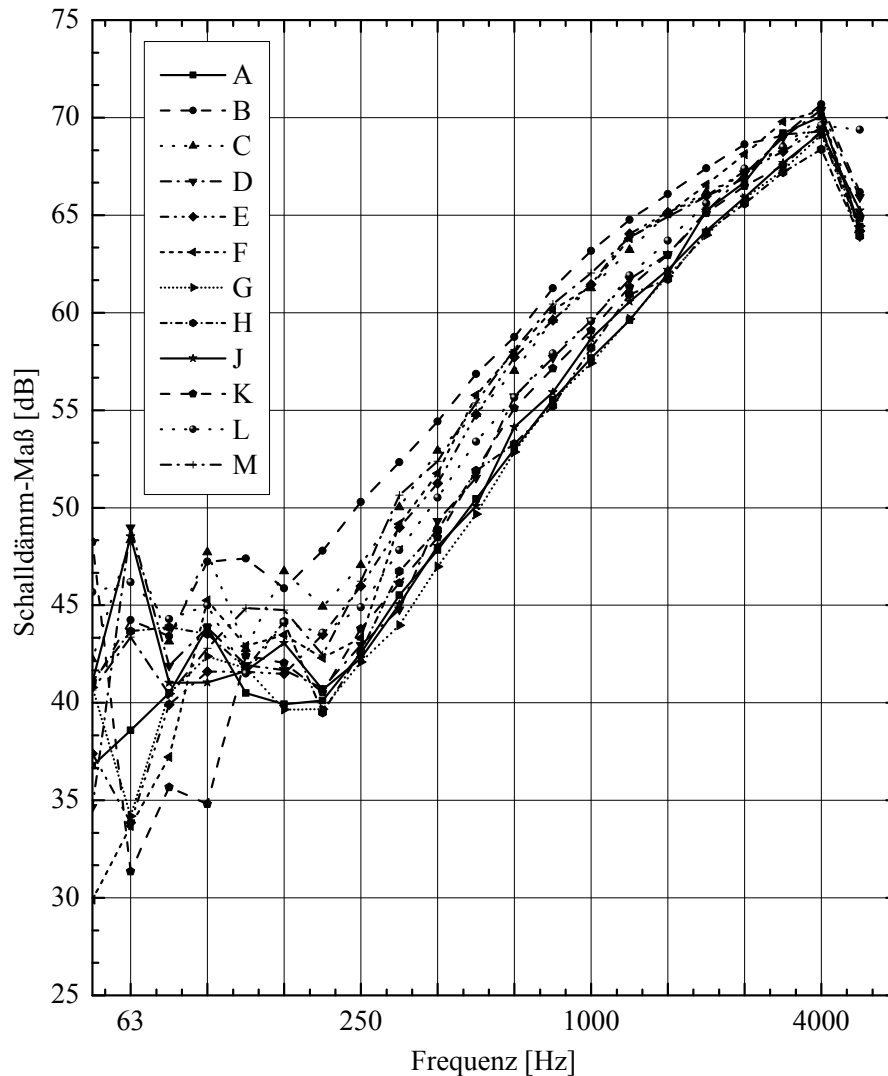


Abbildung 2.8: Ergebnisse eines Ringversuchs der Physikalisch Technischen Bundesanstalt [165, 135]

einzelnen Parameter, die falls bekannt zur Beschreibung der Dämpfungsmechanismen verwendet werden könnten, ändert sich u.a. durch leicht voneinander abweichende Prüfstandskonstruktionen. Durch Messung der jeweiligen Verlustfaktoren und Umrechnung auf einen Referenzverlustfaktor wurden leicht verbesserte Ergebnisse erzielt. Als weitere Ursachen werden die Schallübertragung über Nebenwege, die Lagerung des Prüfobjekts sowie die Energieableitung in die Umgebung, wobei insbesondere der Untergrund eine Rolle spielt, vermutet. Außerdem spielen die Querschnittsverhältnisse sowie die Geometrie des Prüfstandes eine Rolle. Abschließend bleibt festzuhalten, dass die Messung des Schalldämm-Maßes von Wänden eine komplexe Aufgabe darstellt, einige Erfahrung erfordert [60] und nur durch mit hohem Aufwand durchzuführende Parameterstudien zuverlässige Ergebnisse zu erzielen sind.

### 2.1.3 Berechnung des Schalldämm-Maßes

Ein Rechenmodell zur Bestimmung der Luftschalldämmung zwischen Räumen in Gebäuden aus den Bauteileigenschaften findet sich erstmals in DIN EN 12354 [61]. Diese Bauteileigenschaften, die sowohl die direkte Schalldämmung als auch die Flankenübertragung beschreiben, werden zum größten Teil aus Messungen oder theoretisch abgeleiteten Verfahren der Schallausbreitung gewonnen. Im Rahmen der Norm werden zwei Rechenmodelle eingeführt. Das erste Modell ermöglicht eine detaillierte Beschreibung des Bauteils in Frequenzbändern, aus denen dann Einzahlangaben bestimmt werden können. Beim zweiten Modell handelt es sich um ein vereinfachtes Verfahren, dass allerdings nur einen eingeschränkten Einsatzbereich hat. Es verwendet direkt die Einzahlangaben aller beteiligten Bauteile.

Das nach DIN 4109 ermittelte Bau-Schalldämm-Maß beinhaltet auch die Einbausituation des Prüfobjekts. Bei der Ermittlung nach DIN EN 12354 wird nun versucht, sämtliche Bauteile und Nebenwege aufzulösen. Aus diesen Teilwerten wird dann das resultierende Schalldämm-Maß berechnet. Die Grundlage der beiden Rechenmodelle nach DIN EN 12354 bildet die genaue Untersuchung der in Abbildung 2.1 dargestellten Schallübertragungswege. Neben der direkten und der indirekten Luftschallübertragung werden auch Körperschallübertragungswege berücksichtigt, wobei hier das Stoßstellendämm-Maß  $K_{ij}$  einen besonderen Einfluss hat. Dieses Stoßstellendämm-Maß beschreibt die Übertragung der Körperschallleistung an einer Stoßstelle von zwei oder mehr Bauwerksteilen für jeden Übertragungsweg von  $i$  nach  $j$ .

Die Genauigkeit der in DIN EN 12354 vorgestellten Berechnungsverfahren hängt sehr stark von Faktoren wie der Genauigkeit der Eingangsdaten, der Übereinstimmung von Modell und tatsächlicher Bausituation oder auch der Ausbildung der Stoßstellen ab. Die Standardabweichung für Gebäude mit homogenen tragenden Wänden beträgt für die Werte der Einzahlangaben rund 2 dB.

## 3 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen, die zur Modellierung bauakustischer Fragestellungen benötigt werden, vorgestellt. Der erste Abschnitt beschreibt wichtige physikalische Grundlagen der Modellbildung. Danach wird auf die Ausbreitung von Körperschall in platten- und scheibenförmigen Strukturen eingegangen. Es werden die wichtigsten Wellenarten, die im Rahmen bauakustischer Simulationen relevant sind, vorgestellt und charakterisiert.

In Abschnitt 3.3 wird die Gleichung zur Beschreibung der Wellenausbreitung in einem kompressiblen, adiabatischen und idealen Fluid unter Voraussetzung kleiner Bewegungen hergeleitet. Danach wird das akustische Randwertproblem formuliert und dessen Eindeutigkeit in Abhängigkeit von der Art der Randbedingung diskutiert.

Die Grundgleichungen, die zur Beschreibung von Wellenausbreitungsvorgängen in platten- und scheibenartigen Bauteilen benötigt werden, werden in Abschnitt 3.4 vorgestellt. Dabei werden sowohl isotrope als auch orthotrope Materialien berücksichtigt.

Die Kopplung von akustischem Fluid und elastischer Struktur ist ein wichtiger Schritt zur Erfassung der Wechselwirkungseffekte zwischen diesen beiden Medien. In Abschnitt 3.5 werden die zur Modellierung dieser Wechselwirkungseffekte benötigten Grundgleichungen beschrieben.

Wie bereits in Abschnitt 2.1.1 festgestellt wurde, ist die Beschreibung von Dämpfungsmechanismen im Rahmen von bauakustischen Untersuchungen ein sehr wichtiger Faktor. Daher werden in diesem Kapitel zwei Modelle vorgestellt, die zur Beschreibung von Dämpfungsmechanismen im akustischen Fluid und den zu untersuchenden Bauteilen verwendet werden.

Abschließend wird in Abschnitt 3.7 auf Verfahren zur Modellierung poröser Materialien eingegangen, die zur Beschreibung einer Vielzahl von Materialien, die in praxisrelevanten Konstruktionen vorkommen, verwendet werden können. Diese Modelle sind an die bestehende Formulierung für das akustische Fluid sowie die elastische Struktur zu koppeln, um die gegenseitigen Wechselwirkungen im Berechnungsmodell zu erfassen.

### 3.1 Modellbildung

Um die akustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen untersuchen zu können, ist ein geeignetes Modell für die Beschreibung von Schalltransmissionsvorgängen zu entwickeln. In Abbildung 3.1 ist schematisch das System, das der Untersuchung von trennenden Bauteilen zu Grunde liegt, dargestellt. Im Senderraum werden durch eine Schallquelle, beispielsweise einen Lautsprecher, die Fluidpartikel in Schwingung versetzt. Dabei regen benachbarte Fluidpartikel sich gegenseitig zum Schwingen an. Es entsteht somit eine Wellenfront, die sich im abgeschlossenen Fluid ausbreitet. Der Schall benötigt ein Medium, in dem es sich ausbreiten kann. Schall, der sich in festen Körpern ausbreitet, wird als Körperschall bezeichnet. Der Schall hingegen, der sich in der Luft ausbreitet, wird auch Luftschall genannt.

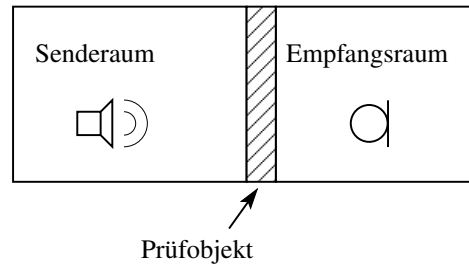


Abbildung 3.1: Modell zur Bestimmung des Schalldämm-Maßes trennender Bauteile

Fluide ohne Viskosität, die eine Idealisierung darstellen, können im Gegensatz zu Festkörpern oder viskosen Fluiden keinerlei Schubspannungen aufnehmen. Somit treten in diesen Fluiden nur Druck- oder Kompressionswellen auf. In Abbildung 3.2 ist das Momentanbild einer Schallwelle in einem Fluid sowie die Größen, die zur Beschreibung dieser Welle herangezogen werden können, dargestellt. Die Fluidpartikel bewegen sich dabei in Richtung der Ausbreitung der Welle hin und

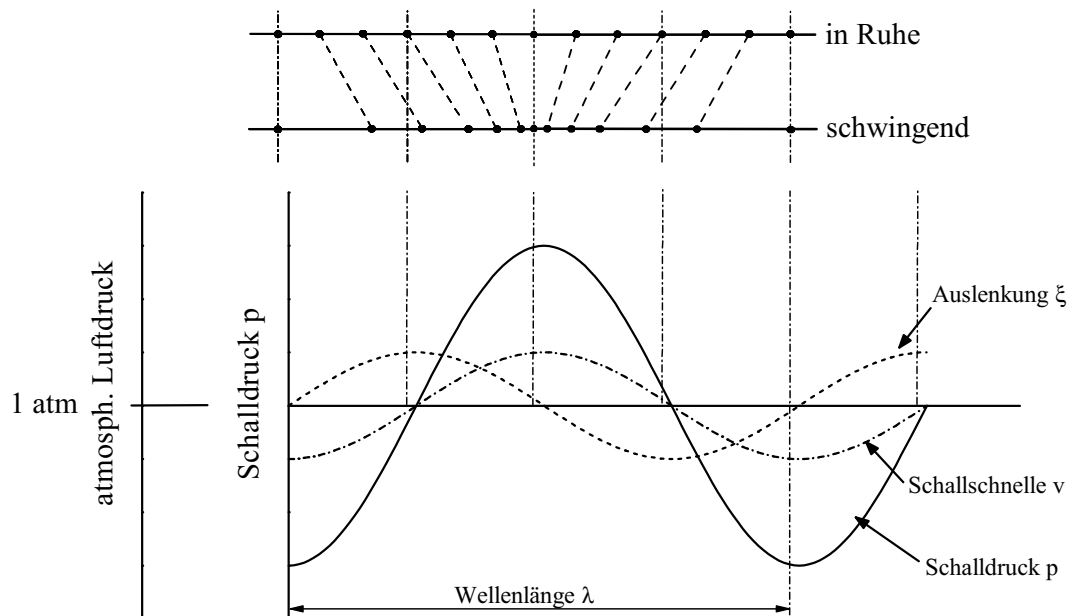


Abbildung 3.2: Ebene Schallwelle

her. Die Geschwindigkeit, mit der die Fluidpartikel hin und her schwingen, wird als Schnelle  $v$  bezeichnet. Dagegen bezeichnet die Schallgeschwindigkeit  $c_F$  die Geschwindigkeit, mit der sich eine Welle im Fluid ausbreitet. Im Gegensatz zur Schnelle ist die Schallgeschwindigkeit eine Materialkenngröße (vgl. Gleichungen (3.2) und (3.8)).

An Orten mit erhöhter Teilchenkonzentration steigt der Schalldruck  $p$  an und ein Wellenberg ent-



steht. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenbergen bzw. zwei benachbarten Wellentälern wird als Wellenlänge  $\lambda$  bezeichnet. Die Gleichungen, die die Ausbreitung der Welle im Fluid mathematisch beschreiben, werden in Abschnitt 3.3 eingeführt.

An den Rändern des betrachteten Raumes treffen diese ebenen Schallwellen auf die den Raum begrenzenden Bauteile wie Wände oder Decken. Dies führt auf das Problem der Transmission, das in Abbildung 3.3 skizziert wird. Die Transmission verknüpft zwei grundlegende Problemfelder des

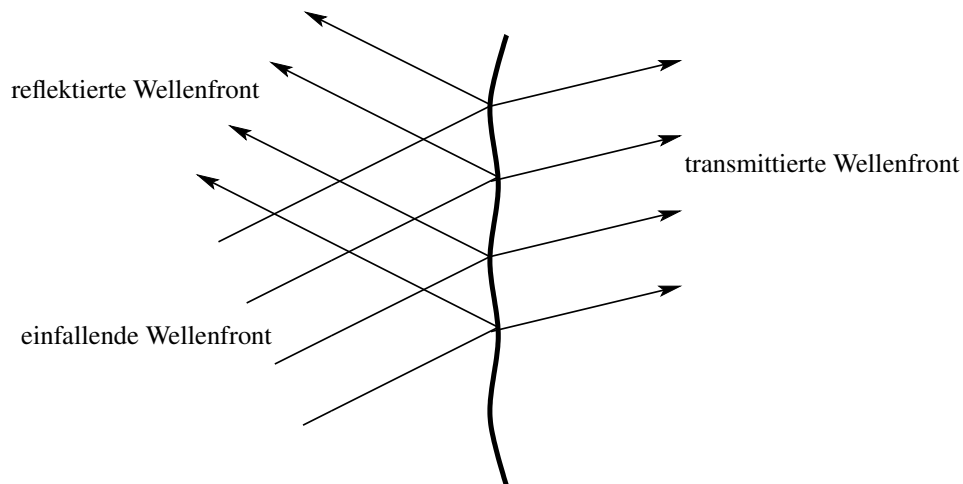


Abbildung 3.3: Schalltransmission durch eine durch schrägen Schalleinfall zu Biegeschwingungen angeregte unendlich ausgedehnte Platte

Körperschalls. Dies sind zum Einen die Schwingungsanregung eines Bauteils durch Schallwellen und zum Anderen die Schallabstrahlung eines schwingenden Bauteils. Da es neben der Transmission auch zu Reflexionen an der Trennfläche von Fluid und Struktur kommt, wird nur ein Teil des einfallenden Schalls transmittiert (vgl. Abbildung 3.3).

Durch Betrachtung des Reziprozitätsprinzips der Akustik wird der direkte Zusammenhang zwischen Anregung und Abstrahlung deutlich. Das Verhältnis von anregender Kraft zu gemessener Schnelle oder Schalldruck zu Volumenfluss bleibt gleich, wenn der Anrege- und der Empfangsort vertauscht werden. Da die Differentialgleichungen für die lineare Akustik in den Ortsvariablen symmetrisch sind, kann die Gültigkeit des Reziprozitätsprinzips vorausgesetzt werden [50].

Bei der vorliegenden Problemstellung treffen die Schallwellen nahezu senkrecht auf die Bauteile, die die Luft im Raum einschließen. Somit belastet der Schalldruck die Bauteile nahezu senkrecht zu ihrer Dickenrichtung. Diese Bauteile sind auf Grund ihrer charakteristischen Abmessungen dünne, ebene Flächentragwerke, die im mechanischen Sinn als Platten bezeichnet werden können. Diese Platten werden durch die Schallwellen in Schwingung versetzt und agieren ihrerseits als flächige Strahler, die Körperschall in die Umgebung und somit in das angrenzende Fluid abstrahlen.

## 3.2 Körperschall in plattenförmigen Bauteilen

Im Unterschied zu einem Fluid kann ein elastischer Festkörper auch Schubspannungen aufnehmen. Daher breiten sich im dreidimensionalen, unbegrenzten Festkörper neben den Dichtewellen auch Schubwellen aus. Diese beiden Wellenarten breiten sich voneinander unabhängig aus. Dünne Bauteile, wie Platten oder Balken, sind hingegen begrenzte Festkörper mit schubspannungsfreier

Oberfläche. Dadurch kommt es zur Kopplung von Dichte- und Schubwelle, wodurch weitere Arten von Körperschallwellen entstehen.

Die bedeutendste Wellenart sind die Biegewellen, bei denen sowohl eine transversale Biegebewegung als auch eine Winkelbewegung auftritt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist deutlich geringer als die der Dichte- oder Schubwellen. Biegewellen transportieren aber zu meist deutlich mehr Schallenergie und sind aufgrund ihrer großen transversalen Komponente die wesentliche Ursache für die Abstrahlung von Luftschall [50]. In Abbildung 3.4 sind die Wellenformen, die am wichtigsten für die Schallausbreitung in endlichen Festkörpern sind, schematisch dargestellt, wobei  $\lambda$  die Wellenlänge bezeichnet. Zusätzlich zu den in Abbildung 3.4 skizzier-

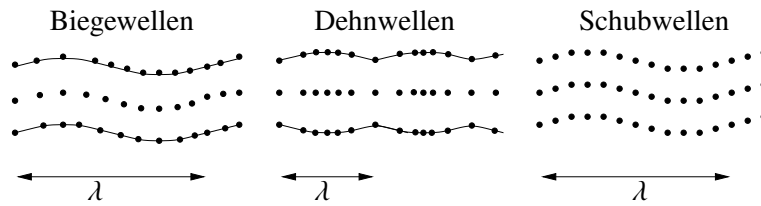


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung der Ausbreitung von Wellen in plattenartigen Bauteilen

ten Wellenformen gibt es eine Vielzahl weiterer Wellenarten, die in [118] ausführlich beschrieben werden. Die wichtigsten Wellentypen, die zur Beschreibung bauakustischer Probleme benötigt werden, werden in den nun folgenden Abschnitten kurz vorgestellt.

### 3.2.1 Dichtewellen

Neben denen in Abbildung 3.4 dargestellten Wellentypen spielt auch die Dichtewelle, die auch als Longitudinalwelle bezeichnet wird, eine wichtige Rolle. Bei der longitudinalen Dichtewelle fallen sowohl die Schwingungs- als auch die Ausbreitungsrichtung zusammen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_L$  lässt sich aus dem Kompressionsmodul  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  mit Elastizitätsmodul  $E$  sowie Querkontraktionszahl  $\nu$  und der Dichte  $\rho$  des Festkörpers zu

$$c_L = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (3.1)$$

bestimmen. Wie bereits zuvor in Abschnitt 3.1 erwähnt, ist dieser Wellentyp auch für die Schallausbreitung in idealen Gasen verantwortlich. Für derartige Gase lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle aus dem Gasdruck  $p$ , der Gasdichte  $\rho$  sowie dem Isentropenexponenten  $\kappa$  berechnen

$$c_L = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}. \quad (3.2)$$

### 3.2.2 Dehnwellen

Dehnwellen können sich nur in Körpern ausbilden, bei denen wenigstens eine der Abmessungen kleiner ist als eine Wellenlänge einer Dichtewelle. Dies ist sowohl für platten- als auch scheibenartige Tragwerke der Fall. Neben der longitudinalen Schnelle tritt bei Dehnwellen zusätzlich eine Schnellekomponente in transversaler Richtung auf. Dies ist auf Grund der Querkontraktion eines schubsteifen Körpers möglich. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_D$  der Dehnwelle ergibt sich

aus

$$c_D = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3.3)$$

wobei  $E$  der Elastizitätsmodul und  $\rho$  die Dichte des Festkörpers sind. Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit ist kleiner als die der zugehörigen Dichtewelle, da das Medium wegen der Möglichen seitlichen Ausdehnung weicher ist.

### 3.2.3 Schubwellen

Bei Schubwellen, die auch als Transversal-, Quer- oder Scherwellen bezeichnet werden, steht die Schallschnelle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit für Schubwellen lautet

$$c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (3.4)$$

Sie berechnet sich somit aus dem Schubmodul  $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$  und der Dichte  $\rho$  des Festkörpers.

### 3.2.4 Biegewellen

Bei der Biegewelle tritt sowohl eine transversale Bewegung als auch eine Winkelbewegung auf. Diese Bewegung senkrecht zur Oberfläche stellt die grundlegende Bedingung für die Abstrahlung von Schall in das umgebende Medium dar. Somit ist die Biegewelle die für die Ausbreitung von Körperschall in Platten die wichtigste Wellenart, da sie die größte transversale Bewegung aufweist und daher den größten Beitrag zur Schallabstrahlung der Platte in das umgebende Fluid leistet. Ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit ist im Gegensatz zu den bisher betrachteten Wellentypen von der Frequenz  $\omega$  abhängig und berechnet sich aus der flächenbezogenen Masse  $\rho \cdot h$  sowie der Biegesteifigkeit  $B = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}$  der Platte zu

$$c_B = \sqrt[4]{\frac{B}{\rho \cdot h}} \omega. \quad (3.5)$$

Somit ist die Ausbreitung von Biegewellen ein dispersiver Vorgang.

Für die Untersuchung der akustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen ist nun zu untersuchen, welche der zuvor vorgestellten Wellentypen einen signifikanten Beitrag zur Schallabstrahlung leisten. Es ist festzustellen, dass nur Wellentypen zu berücksichtigen sind, die eine signifikante transversale Bewegung aufweisen, da nur solche senkrecht zur Oberfläche stattfindende Bewegungen eine Schalldruckänderung im angrenzenden Fluid bewirken können. Neben den Schubwellen haben vor allem die Dehn- und die Biegewellen transversale Anteile. Dabei haben die Biegewellen den größten Anteil an der Schallabstrahlung, insbesondere wenn die Anregung durch Luftschall erfolgt. Wird die Platte hingegen mechanisch angeregt, so erhöht sich der Einfluss anderer Wellentypen. Eine direkte Körperschallanregung wird im Rahmen der hier durchgeführten Untersuchungen vernachlässigt. Eine Anwendung, bei der die Anregung durch Körperschall zu berücksichtigen wäre, ist die Untersuchung von Trittschall.

Soll zusätzlich zum trennenden Bauteil in Abbildung 3.1 auch der Einfluss flankierender Bauteile

bei der Berechnung der Schalldämmung berücksichtigt werden, so sind auch Dehnwellen im Modell zu erfassen. In Abbildung 3.5 ist schematisch ein Kreuzungspunkt zweier Wände skizziert. An

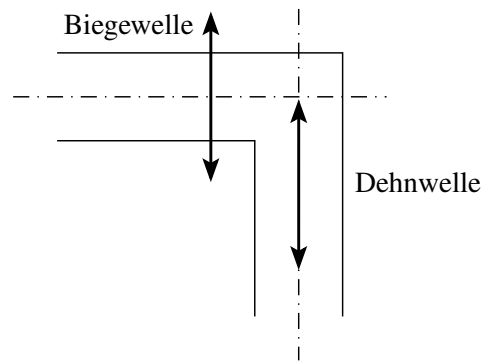


Abbildung 3.5: Transformation von Biege- in Dehnwellen am Kreuzungspunkt zweier Wände. Die Pfeile kennzeichnen die Bewegungsrichtung der Teilchenschwingungen.

derartigen Knotenpunkten werden Biege- in Dehnwellen sowie Dehnwellen in Biege-Wellen transformiert. Weitere Wellentypen wie Torsionswellen und Rayleighwellen sind bei den in der Folge betrachteten Problemstellungen vernachlässigbar.

Neben der Schalltransmission durch trennende Bauteile soll die Längsdämmung von Bauteilen untersucht werden. In Abbildung 3.6 ist der Grundriss des Versuchsaufbaus, an dem die Längsdämmung flankierender Bauteile untersucht werden soll, dargestellt. Die Außenwände des Prüfstandes sind zur Vereinfachung nicht abgebildet. In dieser Konfiguration wird die direkte Schall-

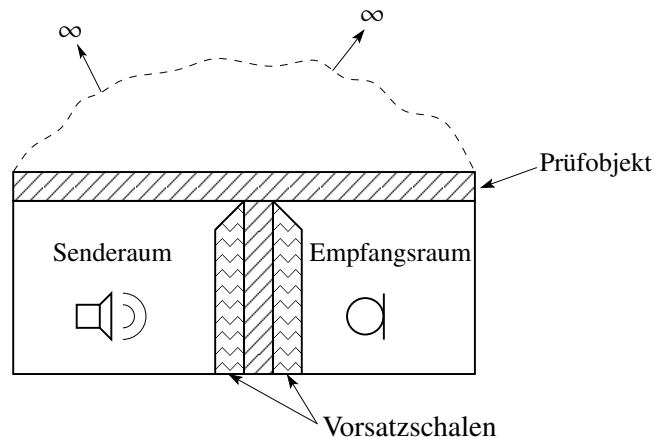


Abbildung 3.6: Modell zur Simulation der Längsdämmung flankierender Bauteile unter Vernachlässigung der Außenwände des Prüfstands

übertragung vom Sende- in den Empfangsraum mit Hilfe von Vorsatzschalen, die vor dem trennenden Bauteil angebracht werden, verhindert. Der Luftschall kann somit nur das Prüfobjekt zu Biegeschwingungen anregen. Diese Biegeschwingungen strahlen dann wiederum Schall in dem Empfangsraum ab. Die Bestimmung der Längsdämmung erfolgt häufig für Bauteile, die an der Außenseite von Gebäuden liegen und ein Bestandteil der Fassade sind. Somit muss ein Modell zur Berechnung der Längsdämmung zusätzlich zu den abgeschlossenen Luftvolumina des Sende-

und des Empfangsraumes auch die Luft außerhalb des Gebäudes berücksichtigen. Dabei ist vor allem sicherzustellen, dass keine Schallwellen von den künstlichen Gebietsrändern, die durch den Abbruch der Diskretisierung geschaffen werden, in das Berechnungsgebiet reflektiert werden.

### 3.2.5 Grenzfrequenz und Koinzidenzeffekt

Die Stärke der Abstrahlung einer Platte hängt wesentlich vom Verhältnis der Wellenlänge der Schwingungen der Struktur zur Schallwellenlänge im umgebenden Medium ab. Ist die Wellenlänge der Strukturschwingungen größer als die Wellenlänge im Fluid, so ist die Abstrahlung groß. Ist hingegen die Wellenlänge im Fluid größer als die Wellenlänge der Struktur, so ist die Abstrahlung gering [50].

Betrachtet man die in Abbildung 3.7 dargestellte Struktur, in der sich Biegewellen mit der Wellenlänge  $\lambda_S$  ausbreiten, so erfolgt die Abstrahlung in das umgebende Fluid, dessen Wellenlänge  $\lambda_F$  beträgt unter einem Winkel  $\alpha$ . Es gilt

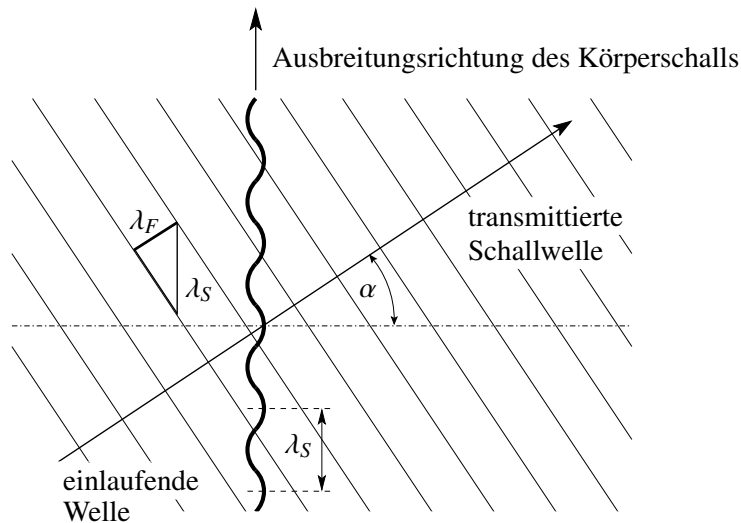


Abbildung 3.7: Zusammenhang zwischen Schalleinfallswinkel und Spuranpassung (Koinzidenz)

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda_F}{\lambda_S} = \frac{c_F}{c_S}. \quad (3.6)$$

Da der Sinus des Winkels  $\alpha$ , der auch als Abstrahlwinkel bezeichnet wird, nie größer als Eins sein kann, muss somit auch die Wellenlänge  $\lambda_S$  bzw. die Geschwindigkeit  $c_S$  der Struktur stets größer sein als die entsprechenden Werte des Fluids.

Es existiert somit eine Frequenz, bei der diese beiden Wellenlängen exakt gleich groß sind. Diese Frequenz wird als Koinzidenzgrenzfrequenz  $f_c$  oder häufig auch nur als Grenzfrequenz bezeichnet. Sie berechnet sich nach oben genannter Überlegung für plattenartige Bauteile mit unendlicher Ausdehnung zu

$$\begin{aligned} \lambda_F = \lambda_S &\iff \frac{c_F}{\omega} = \frac{c_S}{\omega} \\ \Rightarrow f_c &= \frac{c_F^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{B}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Im Bereich dieser Frequenz kommt es zu einer sogenannten Spuranpassung, die eine verschlechterte Luftschalldämmung des Bauteils im Bereich dieser Frequenz zur Folge hat. Dieser Effekt wird auch als Koinzidenzeffekt bezeichnet.

Die Koinzidenzgrenzfrequenz  $f_c$  ist die niedrigste Frequenz, bei der dieser Koinzidenzeffekt auftreten kann. Diese Frequenz ergibt sich für streifenden Schalleinfall, d.h. für einen Winkel  $\alpha$  von  $90^\circ$ .

Das Schallfeld, das von einem schwingenden Bauteil abgestrahlt wird, dessen Anregungsfrequenz oberhalb der Koinzidenzgrenzfrequenz  $f_c$  liegt, wird als Fernfeld bezeichnet. Liegt die Anregungsfrequenz des schwingenden Bauteils hingegen unterhalb der Koinzidenzgrenzfrequenz, bildet sich ein sogenanntes Nahfeld aus. Bei diesem Nahfeld nimmt der Schalldruck mit zunehmender Entfernung vom schwingenden Bauteil sehr schnell ab. Dieser Effekt wird verstärkt, falls die Differenz der Wellenlängen sehr groß ist und begründet sich in speziellen, rotierenden Teilchenbewegungen im Fluid, die für Anregungen unterhalb der Koinzidenzgrenzfrequenz zu beobachten sind.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Phänomene gelten uneingeschränkt nur für unendlich ausge dehnte Platten. In der Praxis treten hingegen nur Platten mit endlichen Abmessungen auf, an deren Begrenzungen kurze Körperschallwellen reflektiert werden und zurücklaufen können. Dadurch bewirken sie zusätzlich zu den Nahfeldeffekten Fernfeldeffekte, die zu einer Schallabstrahlung in die Umgebung führen. Allerdings ist diese Abstrahlung bei Anregung unterhalb der Grenzfrequenz geringer als die Schallabstrahlung bei Anregung oberhalb der Grenzfrequenz, wo die reinen Fernfeldeffekte überwiegen. Aufgrund der unterschiedlich starken Reflexionsmöglichkeiten hängt sie jedoch von der Art der Lagerung ab.

### 3.3 Wellenausbreitung im idealen, kompressiblen Fluid

Die grundlegende Gleichung, die die Wellenausbreitung in kompressiblen Gasen und Flüssigkeiten beschreibt, kann mit Hilfe des *Hamiltonschen Prinzips* gewonnen werden. Dieses Verfahren wird in Abschnitt 3.4 zur Herleitung der Bewegungsgleichungen der elastischen Struktur verwendet. In den Standardwerken der Akustik, wie [69, 91, 119] oder [118], wird in der Regel ein anderer Weg beschritten, auf den hier kurz eingegangen werden soll.

Jedes Schallfeld kann als eine Überlagerung vieler einfacher, ebener Schallwellen oder auch Dichtewellen angesehen werden, die sich nur in longitudinaler Richtung bewegen. Diese Annahme gilt insbesondere für Schallfelder, die im Rahmen der Bauakustik betrachtet werden.

Im folgenden Abschnitt wird angenommen, dass die Schallausbreitung frei von Verlusten ist und dass keine Hindernisse wie Wände oder Decken vorhanden sind. Somit wird die Schallausbreitung in einem in alle drei Raumrichtungen unbegrenzten Gebiet, das zusätzlich als homogen angenommen werden soll, betrachtet. In diesem Fall ist die Schallausbreitungsgeschwindigkeit  $c_F(\mathbf{x}, t)$  konstant für alle Orte  $\mathbf{x}$  und alle Zeitpunkte  $t$ . Für Luft beträgt sie

$$c_F = (331,4 + 0,6 \cdot \Theta) \text{ [m/s]}, \quad (3.8)$$

wobei  $\Theta$  die Temperatur der Luft in Grad Celsius darstellt.

In jeder Schallwelle unterliegen die Teilchen der Luft Schwingungen um ihre Ruhelage. Somit kann eine Welle vollständig über die momentanen Verschiebungen dieser Teilchen beschrieben werden. Üblicherweise wird jedoch die vektorielle Schallschnelle  $\mathbf{v}$  anstatt der Verschiebungen verwendet. Die Schallschnelle  $\mathbf{v}$  ist über die NEWTONsche Kraftgleichung

$$\rho_F \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p \quad (3.9)$$

mit dem skalaren Schalldruck  $p$  verknüpft, wobei  $\rho_F$  die Dichte des Fluids bezeichnet. Der Punkt kennzeichnet die Ableitung einer Größe nach der Zeit. Mit Hilfe der Massenerhaltung ergibt sich weiterhin

$$\rho_F \nabla \cdot \mathbf{v} = -\dot{\rho}_0, \quad (3.10)$$

wobei  $\rho_0$  der zeitabhängige Teil der Dichte des Fluids ist. Die Beziehungen (3.9) und (3.10) setzen voraus, dass die Änderungen des Schalldrucks  $p$  und der Dichte des Fluid  $\rho_F$  klein in Bezug auf ihre statischen Werte  $p_0$  und  $\rho_0$  sind. Des Weiteren sollte der Betrag der Schnelle sehr viel kleiner sein als die Schallgeschwindigkeit  $c_F$ . Unter der Annahme, dass ein ideales Gas betrachtet wird, gelten die folgenden Zusammenhänge zwischen dem Schalldruck, der Änderung der Dichte und der Änderung der Temperatur  $\partial\Theta$ :

$$\frac{p}{p_0} = \kappa \frac{\rho_F}{\rho_0} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\partial\Theta}{\Theta + 273}. \quad (3.11)$$

Hierin ist  $\kappa$  der adiabatische Exponent, der für Luft 1,4 beträgt.

Die Schallschnelle und der veränderliche Teil der Dichte kann nun aus (3.9)–(3.11) eliminiert werden, woraus sich die *Wellengleichung* für den Schalldruck  $p$  als

$$\Delta p = \frac{1}{c_F^2} \ddot{p} \quad (3.12)$$

ergibt. Gleichung (3.12) kann nun unter der Annahme, dass der Schalldruck  $p$  einem harmonischen Zeitverlauf folgt

$$p(\mathbf{x}, t) = \hat{p}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \quad (3.13)$$

vom Zeitbereich in den Frequenzbereich überführt werden. In (3.13) bezeichnet  $i = \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit und  $\omega$  die Kreisfrequenz.  $\hat{p}$  ist die Amplitude des Schalldrucks. Somit ergibt sich aus (3.12) die sogenannte *Helmholtz-Gleichung*

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (3.14)$$

mit der *Wellenzahl*  $k = \frac{\omega}{c_F}$ . In (3.14) und im Folgenden wird auf die explizite Kennzeichnung der Amplitude verzichtet.

### 3.3.1 Das akustische Randwertproblem

Um übliche physikalisch-technische Probleme behandeln zu können, ist es allgemein erforderlich, das System, das mit Hilfe der Differentialgleichung beschrieben werden soll, von seiner Umgebung abzugrenzen. Der Einfluss des Systems auf die Umgebung wird in diesem Fall mit Hilfe von Randbedingungen erfasst. Die Differentialgleichung bildet dann zusammen mit den Randbedingungen das sogenannte Randwertproblem.

Im Rahmen der Akustik treten verschiedene Arten von Randwertproblemen auf. Es wird zwischen Innenraum- und Außenraumproblemen unterschieden. Außenraumprobleme treten bei Abstrahlungsproblemen auf, d.h. eine der Grenzen des betrachteten Gebiets liegt im Unendlichen. In der Bauakustik werden überwiegend Innenraumprobleme betrachtet. Hierbei wird ein abgeschlossenes Gebiet betrachtet und der Einfluss des umgebenden Gebiets mit Hilfe geeigneter Randbedingungen erfasst. Bei zahlreichen Fragestellungen, wie z.B. der Untersuchung des Schalldurchgangs durch Isolierglasscheiben [123] oder auch der Simulation der Längsdämmung von flankierenden Außenbauteilen, treten das Innen- und das Außenraumproblem gemeinsam auf.

In der vorliegenden Arbeit soll  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$  den Innenraum und  $\Omega_a := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_i}$  den Außenraum definieren, wobei  $\overline{\Omega_i} = \Omega_i \cup \Gamma$ . Der Rand  $\Gamma := \partial\Omega$  stellt den gemeinsamen Rand der Gebiete  $\Omega_i$  und  $\Omega_a$  dar. In Abbildung 3.8 sind diese Definitionen dargestellt.

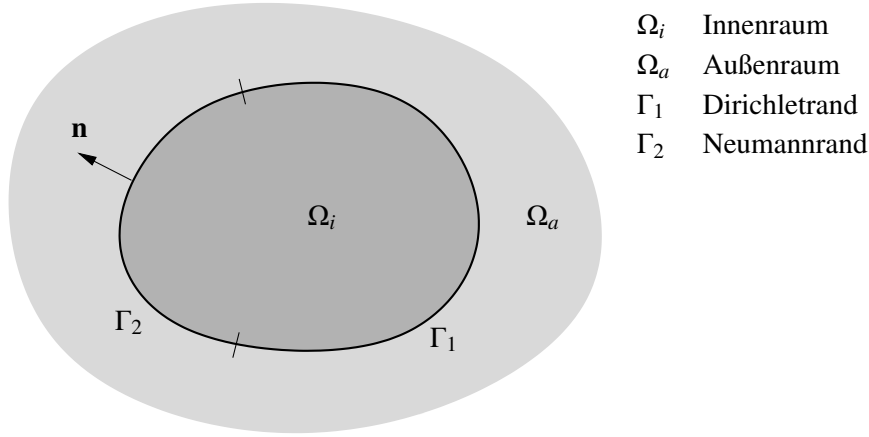


Abbildung 3.8: Gebiet mit Berandung und Normalenvektor

Für den Rand  $\Gamma$  werden in der Regel drei Arten von Randbedingungen unterschieden: die Dirichletsche, die Neumannsche und die Robinsche Randbedingung. Ist der Schalldruck am Rand  $\Gamma_1$  zu

$$p(\mathbf{x}) = \bar{p}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (3.15)$$

vorgegeben, spricht man von einer Dirichlet-Randbedingung. Bei einer Neumann-Randbedingung ist der normal zur Oberfläche des Gebiets liegende Schallfluss zu

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (3.16)$$

gegeben. Aus der Linearkombination der Dirichlet- und der Neumann-Randbedingung ergibt sich die Robin-Randbedingung. Diese Art der Randbedingung wird zur Modellierung absorbierender Ränder verwendet.

### 3.3.2 Eindeutigkeit von akustischen Randwertproblemen

Das Lösen der Helmholtzgleichung (3.14) führt auch bei Kenntnis der richtigen Randwerte nicht zwingend auf eine eindeutige Verteilung des Schalldrucks und der Schnelle im Raum. Die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen ist somit ein wichtiges Thema bei der Behandlung von Randwertproblemen.

Für physikalisch sinnvolle Problemstellungen existiert zumeist eine eindeutige Lösung. Im Rahmen der Modellbildung müssen jedoch in der Mehrzahl der Fälle Vereinfachungen getroffen werden, wodurch die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen nicht mehr gegeben sein muss. Dieses Problem wird in [190] ausführlich diskutiert. Im Folgenden sollen nur die wichtigsten Zusammenhänge kurz wiedergegeben werden.

In Bezug auf die Eindeutigkeit des Randwertproblems ergeben sich Unterschiede bei der Betrachtung von Innen- und Außenraumproblemen. In der Bau- bzw. Raumakustik werden in der Regel Innenraumprobleme betrachtet. Die Berechnung von Abstrahlproblemen oder Schallfeldern im



Freien ist als Außenraumproblem definiert. Da im Folgenden die Dämpfung des Fluids berücksichtigt werden soll, ist neben der Unterscheidung in Innen- und Außenraumproblem auch eine Fallunterscheidung mit Bezug auf die Wellenzahl  $k$  vorzunehmen, die für ein gedämpftes Fluid auch komplex sein kann (vgl. Abschnitt 3.6.1):

$$\begin{array}{ll} k = 0 & \text{statischer Fall} \\ \Re(k) > 0 \quad \Im(k) = 0 & \text{Schwingung ohne Dämpfung} \\ \Re(k) > 0 \quad \Im(k) > 0 & \text{Schwingung mit Dämpfung} \end{array}$$

Für gedämpfte Innenraumprobleme lässt sich eine Eindeutigkeitsaussage treffen, da für gedämpfte Schwingungen nur eine Lösung existiert, die die Helmholtzgleichung im Gebiet sowie die Randbedingungen erfüllt. Bei Problemen mit einer rein reellen Wellenzahl  $k$  existiert im allgemeinen Fall sowohl für Dirichlet- als auch Neumannprobleme keine eindeutige Lösung. Es treten nur für bestimmte charakteristische Wellenzahlen  $k$  Eigenlösungen auf. Im statischen Fall ( $k = 0$ ) existiert nur für das Dirichletproblem eine eindeutige Lösung. Das Neumannproblem kann die Lösung nur bis auf einen beliebigen konstanten Wert eindeutig bestimmt werden. Somit ist jede Konstante eine Lösung des homogenen Neumannproblems. Diese Aussagen können mit Hilfe der Anwendung des Maximumprinzips der Potentialtheorie bewiesen werden [34].

Im Außenraum existiert eine eindeutige Lösung der Helmholtzgleichung, sofern die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung für alle Raumrichtungen erfüllt ist [171]

$$\frac{\partial p}{\partial r} = ikp + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

Diese Eindeutigkeit gilt für alle der drei oben genannten zu untersuchenden Fälle, wie in [125] unter Betrachtung der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung in der komplexen Form gezeigt wurde

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp\right)\left(\frac{\partial p}{\partial r} - i\overline{k}p\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Unter der Annahme, dass  $p$  die Differenz zweier Lösungen der Helmholtzgleichung mit identischen Randwerten sei, folgt aus der Anwendung der 1. und 2. Greenschen Identität und einiger Umformungen (s. [190])

$$\oint_{\partial\Omega_R} \left( \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| + |k|^2 |r|^2 \right) d\Gamma + 2\Im(k) \oint_{D_R} (|p_{,ii}|^2 + (\Im(k))^2 |p|^2) d\Omega = O(1), \quad R \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Die Eindeutigkeit folgt nun daraus, dass gezeigt wird, dass  $p$  eindeutig verschwindet. Für  $\Im(k) > 0$  muss  $p$  überall identisch Null sein, damit das Integral über den Innenraum für  $R \rightarrow \infty$  verschwindet. Für rein reellwertige Wellenzahlen  $k$  verbleibt nur das Integral über das Gebiet  $\Omega_R$ . Nach dem Lemma von Rellich folgt daraus, dass  $p$  überall Null ist [125]. Die Eindeutigkeit im statischen Fall wird durch die Zusatzforderung gesichert, dass  $p$  in einer Umgebung von  $\infty$  harmonisch ist [190].

### 3.3.3 Randbedingungen des Fluids an dessen Begrenzungsflächen

Wird das betrachtete Fluidgebiet in seiner Ausdehnung beispielsweise durch Wände begrenzt, so werden die auftretenden Schallwellen in Abhängigkeit von der Beschaffenheit der Begrenzungsfläche unterschiedlich stark reflektiert. Abbildung 3.9 stellt diese Verhältnisse schematisch dar. Die mit der Druckamplitude  $p_e$  einfallende Schallwelle trifft auf die Wand. Ein Teil der Schallwellen

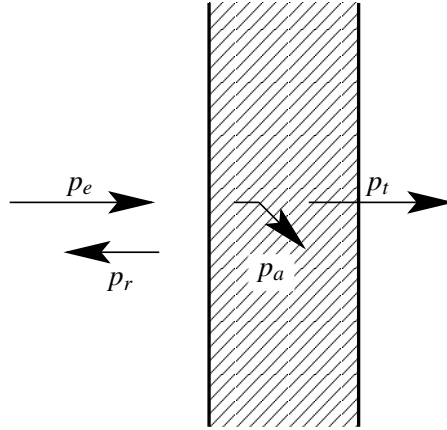


Abbildung 3.9: Reflexion einer Schallwelle an einer Wand

wird direkt reflektiert ( $p_r$ ) und ein Teil absorbiert ( $p_a$ ). Ein dritter Anteil ( $p_t$ ) wird transmittiert und dann in den hinter der Wand liegenden Raum abgestrahlt. Die Verhältnisse zwischen diesen einzelnen Anteilen dienen zur Definition verschiedener akustischer Kenngrößen. Der Reflexionsfaktor  $r$  beschreibt das Verhältnis zwischen reflektierender und einfallender Druckamplitude

$$r = \frac{p_r}{p_e}. \quad (3.20)$$

Mit Hilfe des Schalltransmissionsgrads  $\tau$  wird das Verhältnis zwischen abgestrahlter und auftretender Schalleistung angegeben. Er kann zur Definition des Schalldämm-Maß  $R$ , dem maßgeblichen Kennwert zur Beschreibung der Schalldämmwirkung eines Bauteils, verwendet werden

$$R = 10 \lg \frac{1}{\tau} \quad [\text{dB}]. \quad (3.21)$$

Die Verknüpfung des Schalldrucks  $p$  und der Schnelle  $v$  erfolgt über einen Faktor  $z^0$

$$p = z^0 v, \quad (3.22)$$

der nach [170] als Schallhärte oder in Analogie zur Elektrotechnik auch als Wellenwiderstand bzw. Punktimpedanz eines akustischen Mediums bezeichnet wird. Für eine fortschreitende Welle kann diese Punktimpedanz aus der Dichte  $\rho_F$  und der Schallgeschwindigkeit  $c_F$  des Mediums

$$z^0 = \frac{p}{v} = \rho_F c_F \quad (3.23)$$

berechnet werden. Sie ist abhängig von der Frequenz und reellwertig. Bei Anwendung der Definition (3.22) zur Bestimmung der komplexen Wandimpedanz einer Begrenzungsfläche ist das Verhältnis der komplexen Amplituden des Gesamtdrucks  $p_{ges}$  und der gesamten Schnelle  $v_{ges}$  zu bilden. Unter Einbeziehung der Definition des Reflexionsfaktors  $r$  (3.20) ergeben sich diese Größen zu

$$p_{ges} = (1 + r)p_e \quad \text{und} \quad (3.24)$$

$$v_{ges} = (1 - r)v_e. \quad (3.25)$$

Die komplexe Wandimpedanz kann somit als

$$z = \frac{p_{ges}}{v_{ges}} = \frac{1 + r}{1 - r} \frac{p_e}{v_e} \quad (3.26)$$

formuliert werden. Werden ebene Schallwellen betrachtet, so kann in (3.26) die Beziehung (3.23) substituiert werden. Daraus folgt als komplexe Wandimpedanz für die Kennzeichnung einer ebenen Welle bei senkrechtem Schalleinfall

$$z = \frac{p_{ges}}{v_{ges}} = \frac{1 + r}{1 - r} z^0. \quad (3.27)$$

Mit Hilfe dieser Wandimpedanz  $z$  sowie (3.26) können die in der Praxis auftretenden Beschaffenheiten von Begrenzungsflächen modelliert werden. Diese lassen sich in schallharte (Abbildung 3.10(a)), schallweiche (Abbildung 3.10(b)) sowie absorbierende Begrenzungsflächen unterteilen, wobei schallharte und schallweiche Flächen eine Idealisierung darstellen. Bei einer schallharten

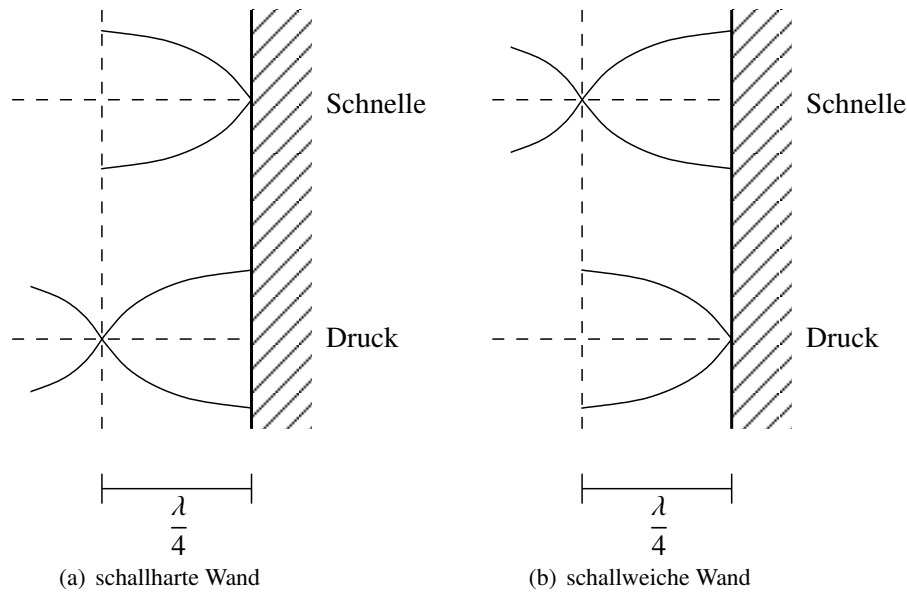


Abbildung 3.10: Reflexion einer Schallwelle an einer schallharten und einer schallweichen Wand: Verhältnis von Druck und Schnelle

Wand wird die Schnelle zu Null, d.h.  $v_{ges} = 0$ . Daraus ergibt sich, dass die komplexe Wandimpedanz  $z$  unendlich groß und der Reflexionsfaktor  $r = +1$  ist. Die ebene Schallwelle wird somit derart reflektiert, dass sich die Druckkomponenten der einfallenden und der reflektierenden Welle addieren (vgl. Abbildung 3.10(a)). Für die Schnelle entsteht eine stehende Welle mit einem Phasensprung von  $\lambda/2$ . Die schallharte Wand stellt somit einen Sonderfall der Neumannschen Randbedingung dar, denn der Schallfluss, und somit die Schnelle, ist bekannt.

An einer schallweichen Begrenzungsfläche ist der Schalldruck  $p_{ges}$  identisch Null. Somit ist auch die komplexe Wandimpedanz Null, der Reflexionsfaktor  $r$  ergibt sich zu  $-1$ . Der Schalldruck wird also an einer vollkommen nachgiebigen Begrenzung gegenphasig reflektiert, die Schnelle verdoppelt sich (vgl. Abbildung 3.10(b)). Demnach ist eine schallweiche Begrenzung ein Spezialfall der Dirichlet Randbedingung: der Druck ist bekannt und wird gerade zu Null.

Sowohl für den Fall der schallweichen als auch den Fall der schallharten Wand sind die Amplituden der einfallenden und der reflektierten Welle gleich groß. Dieser Tatsache liegt die idealisierte Annahme zu Grunde, dass beim Auftreffen der Wellen auf die Begrenzungsfläche keinerlei Energie dissipiert wird.

Als Maß für die Größe solcher Dissipationsverluste an der Begrenzungsfläche des Fluidgebietes dient der Schallabsorptionsgrad  $\alpha$ . Dieser beschreibt das Absorptionsvermögen eines Materials, der als Quotient der vom Material absorbierten Schallenergie und der auftreffenden Schallenergie definiert ist [91]

$$\alpha = \frac{(p_a)^2}{(p_e)^2} = 1 - |r|^2. \quad (3.28)$$

Alternativ kann diese frequenzabhängige Kenngröße mittels des Reflexionsgrads  $r$  definiert werden. Im Falle einer schallweichen bzw. schallharten Begrenzungsfläche ist nach (3.28) der Absorptionsgrad identisch Null. Somit gibt es an den Begrenzungsflächen keinerlei Verluste. Diese Annahme ist jedoch häufig in der Realität nicht gegeben.

An einer Begrenzungsfläche, die vollkommen absorbierend wirkt, ist der Absorptionsgrad  $\alpha$  gleich 1. In diesem Fall ist jedoch der Reflexionsfaktor  $r$  Null, die Welle wird somit vollkommen von der Begrenzungsfläche absorbiert. Für teilweise reflektierende Begrenzungsflächen gilt  $0 < \alpha < 1$ , da der zugehörige Reflexionsfaktor zwischen 1 und 0 liegen muss. Die absorbierende Randbedingung entspricht somit der Robinschen Randbedingung, die in Kapitel 3.3.1 eingeführt wurde.

### 3.4 Modellierung der Struktur

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen der Struktur erfolgt mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips. Dieses Prinzip kann in der Mechanik durch folgende Gleichung beschrieben werden [50]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - E_{pot}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (3.29)$$

Für ein Zeitintervall  $[t_1, t_2]$  erfolgt der Übergang von einem Zustand in einen anderen Zustand derart, dass die Variation der Differenz aus kinetischer Energie  $E_{kin}$  und potentieller Energie  $E_{pot}$  zuzüglich der Variation der von außen zugeführten Arbeit  $W$  Null ergibt. Dieses allgemeine Prinzip wird im Folgenden auf plattenartige Strukturen angewendet.

#### 3.4.1 Schwingungen einer Mindlin-Platte

Trennwände und Decken mit den im Hochbau üblichen Abmessungen werden in der Regel als plattenförmige Bauteile modelliert. Deren Schwingungsverhalten kann in Abhängigkeit von der Schlankheit des Bauteils mit verschiedenen Plattentheorien beschrieben werden. Im Allgemeinen werden in der Mechanik hinreichend dünne Platten (Plattendicke  $h$ /Kantenlänge  $l < 0,1$ ) mit Hilfe der Kirchhoffschen Plattentheorie beschrieben. Dieses Modell geht von einer Schubstarren Platte und kleinen Durchbiegungen aus. Auf dünne bis mäßig dicke Platten ( $h/l < 0,2$ ) wird die Mindlinsche Plattentheorie angewendet [139]. Diese Theorie geht von einer Schubelastischen Platte mit kleinen Durchbiegungen aus. Sie wird häufig auch als Schubdeformationstheorie erster Ordnung bezeichnet.

Im Folgenden wird die Mindlinsche Plattentheorie zur Beschreibung des Schwingungsverhaltens plattenförmiger Bauteile verwendet, da sich die Schlankheit  $h/l$  üblicher Bauteile des Hochbaus

häufig im Bereich mäßig dicker Platten befindet. Des Weiteren verliert die einfache Biegetheorie bei höheren, bauakustisch relevanten Frequenzen zunehmend ihre Gültigkeit [50], da bei dynamischen Problemen das Verhältnis von Plattendicke  $h$  und Biegewellenlänge  $\lambda_B$  ein entscheidendes Kriterium darstellt. Im Rahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie sollte  $h < \lambda_B/6$  sein [50, 122]. Somit würde die maximal zulässige Dicke einer Betonwand bei 3200 Hz auf 6 cm begrenzt [122]. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen der schubelastischen Platte erfolgt mit Hilfe des Hamiltonschen Prinzips. Im Folgenden werden nur die wichtigsten Gleichungen und Annahmen angegeben. Eine ausführliche Herleitung der Gleichungen findet sich beispielsweise in [50]. Das im Weiteren verwendete Koordinatensystem sowie die zugehörigen Plattenbelastungen sind in Abbildung 3.11 dargestellt. Die Verschiebungen der Plattenmittelfläche werden mit  $u_1$ ,  $u_2$  und  $u_3$

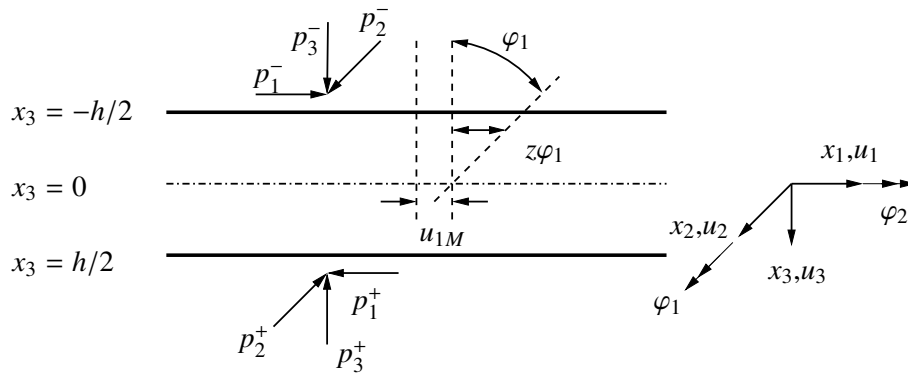


Abbildung 3.11: Koordinatensystem und Plattenbelastung

beschrieben, die Rotationen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  kennzeichnen die Rotationen in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene bzw. der  $x_2$ - $x_3$ -Ebene.  $p_i$  sind die äußeren Lasten in die jeweilige Koordinatenrichtung  $x_i$ .  $u_{1M}$  ist die Verschiebung der Mittelfläche der Platte in  $x_1$ -Richtung. Im Rahmen der Mindlinschen Plattentheorie werden folgende Annahmen getroffen [5]:

- Die Plattendicke ist klein im Vergleich zu den übrigen geometrischen Abmessungen. Die Durchbiegungen der Platte sind klein im Vergleich zur Dicke und ebenfalls die Neigungen im Vergleich zu Eins.
- Die Plattenverzerrungen sind derart, dass gerade Linienabschnitte, die ursprünglich orthogonal auf der Mittelfläche standen, auch im verzerrten Zustand gerade sind, jedoch nicht orthogonal zur verformten Mittelfläche stehen müssen. Diese Annahmen stehen im Gegensatz zur Kirchhoff-Love-Hypothese.
- Die Normalspannungen  $\sigma_{33}$  normal zur Mittelfläche können vernachlässigt werden. Dies entspricht einem ebenen Spannungszustand.

Die Verschiebungen der Platte lassen sich durch

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_{1M}(x_1, x_2) + x_3 \varphi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_{2M}(x_1, x_2) + x_3 \varphi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3.30)$$

angeben. Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$E_{kin} = \frac{\rho}{2} \iiint (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (3.31)$$

worin  $\rho$  die Dichte der Platte ist. Durch Einsetzen der Verschiebungen (3.30) und Integration über die Plattendicke ergibt sich die kinetische Energie zu

$$E_{kin} = \frac{\rho h}{2} \iint \left[ \dot{u}_{1M}^2 + \dot{u}_{2M}^2 + \dot{u}_3^2 + \frac{h^2}{12} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) \right] dx_1 dx_2. \quad (3.32)$$

Die potentielle Energie ergibt sich aus der Summe der Produkte von Spannungen und zugehörigen Verzerrungen

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \tau_{12}\gamma_{12} + \tau_{23}\gamma_{23} + \tau_{13}\gamma_{13}) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.33)$$

Die benötigten Normalspannungen  $\sigma$  und Schubspannungen  $\tau$  der Platte sind in Abbildung 3.12 dargestellt.

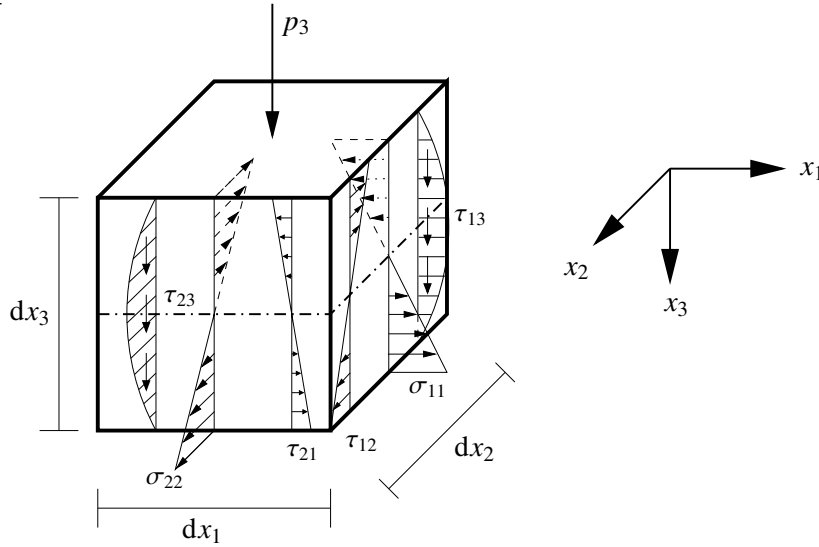


Abbildung 3.12: Spannungen am differentiellen Plattenelement

Die zugehörigen Dehnungen  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  bzw. Schubwinkel  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  lauten

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1} = u_{1M,1} + x_3\varphi_{1,1} \\ \varepsilon_{22} &= u_{2,2} = u_{2M,2} + x_3\varphi_{2,2} \\ \gamma_{13} &= u_{1,3} + u_{3,1} = \varphi_1 + u_{3,1} \\ \gamma_{23} &= u_{2,3} + u_{3,2} = \varphi_2 + u_{3,2} \\ \gamma_{12} &= u_{1,2} + u_{2,1} = u_{1M,2} + x_3\varphi_{1,2} + u_{2M,1} + x_3\varphi_{2,1}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Darin kennzeichnet der Index  $i$  hinter dem Komma die partielle Ableitung in  $x_i$ -Richtung. Unter Anwendung des Hookeschen Gesetzes für isotrope Materialien

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \quad (3.35)$$

worin  $\lambda$  und  $\mu$  die Lamékonstanten sind

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (3.36)$$

ergeben sich die konstitutiven Gleichungen zu

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{Ex_3}{1 - \nu^2}(\varphi_{1,1} + \nu\varphi_{2,2}) \\ \sigma_{22} &= \frac{Ex_3}{1 - \nu^2}(\varphi_{2,2} + \nu\varphi_{1,1}) \\ \tau_{12} &= \frac{Ex_3}{2(1 + \nu)}(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}) \\ \tau_{23} &= \frac{E}{2(1 + \nu)}(\varphi_1 + u_{3,2}) \\ \tau_{13} &= \frac{E}{2(1 + \nu)}(\varphi_2 + u_{3,1}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

$E$  ist Elastizitätsmodul,  $\nu$  die Querkontraktionszahl und  $G$  wird als Schubmodul bezeichnet. Somit besitzen die Spannungen  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  und  $\tau_{12}$ , analog zur klassischen Theorie, einen linearen Verlauf über die Dicke  $h$ . Die Schubspannungen  $\tau_{13}$  und  $\tau_{23}$  sind jedoch unabhängig von  $x_3$  und sind somit in Dickenrichtung konstant. Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich jedoch, wie in Abbildung 3.12 dargestellt, in Dickenrichtung parabolisch verteilte Schubspannungen  $\tau_{13}$  und  $\tau_{23}$ . Um diesen Fehler zu korrigieren, wird ein sogenannter Schubkorrekturfaktor  $k_s$  eingeführt, der u.a. aus energetischen Überlegungen bestimmt werden kann. Laut Mindlin ist dieser Schubkorrekturfaktor abhängig von der Querkontraktionszahl  $\nu$  [139] und Wittrick [199] schlägt

$$k_s = \frac{5}{6 - \nu} \quad (3.38)$$

zur Bestimmung des Schubkorrekturfaktors vor. Damit folgt für die Schubspannungen  $\tau_{13}$  und  $\tau_{23}$

$$\tau_{23} = Gk_s(\varphi_1 + u_{3,2}) \quad \text{bzw.} \quad \tau_{13} = Gk_s(\varphi_2 + u_{3,1}). \quad (3.39)$$

Somit ergibt sich für die potentielle Energie (3.33) nach Integration in Dickenrichtung

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2} \frac{Eh}{(1 - \nu^2)} \iint (u_{1M,1}^2 + 2\nu u_{1M,1} u_{2M,2} + u_{2M,2}^2) dx_1 dx_2 \\ &+ \frac{Gh}{2} \iint (u_{1M,2} + u_{2M,1})^2 dx_1 dx_2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{Eh}{(1 - \nu^2)} \frac{h^2}{12} \iint \left( \varphi_{1,1}^2 + 2\nu \varphi_{1,1} \varphi_{2,2} + \varphi_{2,2}^2 + \frac{1 - \nu}{2} (\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2 \right) dx_1 dx_2 \\ &+ \frac{Ghk_s}{2} \iint \left( (\varphi_1 + u_{3,1})^2 + (\varphi_2 + u_{3,2})^2 \right) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Die äußere Arbeit wird für den Fall, dass sie nur durch über die Fläche verteilte äußere Kräfte hervorgerufen wird, durch

$$W = \iint (p_1 u_{1M} + p_2 u_{2M} + p_3 u_{3M}) dx_1 dx_2 \quad (3.41)$$

beschrieben. Darin sind  $p_i = p_i^- - p_i^+$  die resultierenden Lasten in der jeweiligen Koordinatenrichtung.

Nach Substitution der kinetischen Energie (3.32), der potentiellen Energie (3.40) und der äußeren Lasten (3.41) in das Hamiltonsche Prinzip (3.29) ergibt sich nach einigen Rechenschritten und Durchführung der Variation ein System von fünf partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
 \delta u_{1M} : \quad & \frac{Eh}{1-\nu^2} u_{1M,11} + Gh u_{1M,22} + \frac{1+\nu}{1-\nu} Gh u_{2M,12} - \rho h \ddot{u}_1 = -p_1 \\
 \delta u_{2M} : \quad & \frac{Eh}{1-\nu^2} u_{2M,22} + Gh u_{2M,11} + \frac{1+\nu}{1-\nu} Gh u_{1M,12} - \rho h \ddot{u}_2 = -p_2 \\
 \delta u_3 : \quad & Gh k_s (\Delta u_3 + \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}) - \rho h \ddot{u}_3 = -p_3 \\
 \delta \varphi_1 : \quad & GI \varphi_{1,22} + B \varphi_{1,11} + \frac{1+\nu}{2} B \varphi_{2,12} - Gh k_s (u_{3,1} + \varphi_1) - \rho I \ddot{\varphi}_1 = 0 \\
 \delta \varphi_2 : \quad & GI \varphi_{2,11} + B \varphi_{2,22} + \frac{1+\nu}{2} B \varphi_{1,12} - Gh k_s (u_{3,2} + \varphi_2) - \rho I \ddot{\varphi}_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Darin ist  $B = \frac{EI}{(1-\nu^2)}$  die Biegesteifigkeit und  $I = \frac{h^3}{12}$  das bezogene Flächenträgheitsmoment der Platte. Bei genauer Betrachtung der obigen Gleichungen ist zu erkennen, dass die ersten beiden Gleichungen nur Beziehungen zwischen den Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$ , die in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene liegen, enthalten. Sie beschreiben die sogenannte in-plane Bewegung der Platte infolge äußerer Lasten in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung. Des Weiteren sind die ersten zwei Gleichungen vollständig von den übrigen drei Differentialgleichungen entkoppelt. Diese drei Gleichungen, die die unbekannten Verformungen  $u_3$ ,  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  enthalten, beschreiben die Biegeverformung der Mindlinplatte. Im Gegensatz zur Kirchhofftheorie berücksichtigen sie sowohl eine endliche Schubsteifigkeit  $G$  als auch die Rotationsträgheit  $I$ .

Die Bewegungsgleichungen wurden bisher im Zeitbereich dargestellt. Unter der Annahme, dass sowohl die Anregung als auch die Schwingungen der Platte einem harmonischen Zeitverlauf folgen

$$\begin{aligned}
 p_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{p}_i(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \\
 u_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{u}_i(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \\
 \varphi_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{\varphi}_i(\mathbf{x}) e^{i\omega t},
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

ergibt sich für den Frequenzbereich

$$\delta \hat{u}_{1M} : \quad \frac{Eh}{1-\nu^2} \hat{u}_{1M,11} + Gh \hat{u}_{1M,22} + \frac{1+\nu}{1-\nu} Gh \hat{u}_{2M,12} + \omega^2 \rho h \hat{u}_1 = -\hat{p}_1 \tag{3.44}$$

$$\delta \hat{u}_{2M} : \quad \frac{Eh}{1-\nu^2} \hat{u}_{2M,22} + Gh \hat{u}_{2M,11} + \frac{1+\nu}{1-\nu} Gh \hat{u}_{1M,12} + \omega^2 \rho h \hat{u}_2 = -\hat{p}_2 \tag{3.45}$$

$$\delta \hat{u}_3 : \quad Gh k_s (\Delta \hat{u}_3 + \hat{\varphi}_{1,1} + \hat{\varphi}_{2,2}) + \omega^2 \rho h \hat{u}_3 = -\hat{p}_3 \tag{3.46}$$

$$\delta \hat{\varphi}_1 : \quad GI \hat{\varphi}_{1,22} + B \hat{\varphi}_{1,11} + \frac{1+\nu}{2} B \hat{\varphi}_{2,12} - Gh k_s (\hat{u}_{3,1} + \hat{\varphi}_1) + \omega^2 \rho I \hat{\varphi}_1 = 0 \tag{3.47}$$

$$\delta \hat{\varphi}_2 : \quad GI \hat{\varphi}_{2,11} + B \hat{\varphi}_{2,22} + \frac{1+\nu}{2} B \hat{\varphi}_{1,12} - Gh k_s (\hat{u}_{3,2} + \hat{\varphi}_2) + \omega^2 \rho I \hat{\varphi}_2 = 0. \tag{3.48}$$

Darin ist  $i = \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\hat{\phantom{x}}$  kennzeichnet die Amplitude der jeweiligen Größe. Zur Vereinfachung wird im Folgenden implizit von frequenzabhängigen Größen ausgegangen und auf die Kennzeichnung für Amplituden verzichtet.



### 3.4.2 Orthotrope Materialien

Im Rahmen der Herleitung der Bewegungsgleichungen in Abschnitt 3.4.1 wurde das Hookesche Gesetz für isotrope Materialien (Gleichung (3.35)) verwendet. Viele im Hochbau übliche Wandkonstruktionen, wie leichte mehrschalige Trennwände aus Gipskartonplatten oder auch Fachwerks- und Mauerwerkswände, sind jedoch nicht isotrop. Um auch derartige Wandkonstruktionen untersuchen zu können, wird das Modell um orthotrope Materialien erweitert. Holz oder auch Beton sind orthotrope Werkstoffe und weisen nur drei rechtwinklig aufeinander stehende Materialsymmetrieebenen auf. Dadurch erhöht sich die Anzahl der unabhängigen elastischen Konstanten von zwei, die zur Beschreibung isotroper Materialien ausreichend sind, auf sechs. Dabei wird weiterhin von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen. Im allgemeinen dreidimensionalen Fall sind neun unabhängige Parameter zur eindeutigen Beschreibung des orthotropen Materialverhaltens nötig [127]. Für den ebenen Spannungszustand lautet die Elastizitätsmatrix [4]

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_2\nu_{12}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1\nu_{21}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{s13}G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{s23}G_{23} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

$E_1$  und  $E_2$  sind die Elastizitätsmoduli in Richtung der jeweiligen Koordinatenachse und  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  und  $G_{23}$  die Schubmoduli, die das Schubverhalten zwischen den jeweiligen Achsen beschreiben. Der erste Index der Querdehnzahl gibt die Dehnungsrichtung und der zweite Index die Richtung der Normalspannung an. Die Terme  $k_{s13}$  und  $k_{s23}$  geben die Schubkorrekturfaktoren in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene bzw. der  $x_2$ - $x_3$ -Ebene an. Für ein homogenes Material ergibt sich mit dem von Reissner beschriebenen Ansatz ein Faktor  $k_{s13} = k_{s23} = 5/6$  [4, 146].

Mit den orientierten Biegesteifigkeiten der Platte in  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Richtung [81]

$$B_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad \text{und} \quad B_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (3.50)$$

können die Schwingungsgleichungen für eine orthotrope Mindlinplatte wie folgt formuliert werden

$$\delta u_{1M} : \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} u_{1M,11} + G_{12} h u_{1M,22} + \left( \frac{\nu_{yx} E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + G_{12} \right) h u_{2M,21} + \omega^2 \rho h u_{1M} = -p_1 \quad (3.51)$$

$$\delta u_{2M} : \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} u_{2M,22} + G_{12} h u_{2M,11} + \left( \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + G_{12} \right) h u_{1M,12} + \omega^2 \rho h u_{2M} = -p_2 \quad (3.52)$$

$$\delta u_3 : G_{13} h k_{s13} (u_{3,11} + \varphi_{1,1}) + G_{23} h k_{s23} (u_{3,22} + \varphi_{2,2}) + \omega^2 \rho h u_3 = -p_3 \quad (3.53)$$

$$\delta \varphi_1 : G_{13} h k_{s13} (u_{3,1} + \varphi_1) - G_{12} I (\varphi_{1,22} + \varphi_{2,12}) - B_1 (\varphi_{1,11} + \nu_{21} \varphi_{2,12}) - \omega^2 \rho I \varphi_1 = 0 \quad (3.54)$$

$$\delta \varphi_2 : G_{23} h k_{s23} (u_{3,2} + \varphi_2) - G_{12} I (\varphi_{2,11} + \varphi_{1,12}) - B_2 (\varphi_{2,22} + \nu_{12} \varphi_{1,12}) - \omega^2 \rho I \varphi_2 = 0. \quad (3.55)$$

Viele Wände im Hochbau bestehen aus verschiedensten Materialien, die häufig stark unterschiedliche Materialeigenschaften besitzen. Das Schwingungsverhalten der gesamten Wand wird maßgeblich durch die einzelnen Komponenten bestimmt. Um auch derart komplexe Wandstrukturen

im vorliegenden Modell simulieren zu können, wird in [2] ein Verfahren vorgestellt, dass aus den Materialparametern der einzelnen Komponenten homogenisierte Parameter ermittelt. Diese Materialparameter können dann wiederum direkt in das vorliegende Modell eingebracht werden.

### 3.5 Kopplung von akustischem Fluid und elastischer Struktur

Prinzipiell stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung, mit deren Hilfe die Wechselwirkungen zwischen elastischer Struktur und angrenzendem Fluid beschrieben werden können. Die erste Möglichkeit besteht darin, die zu untersuchenden Gebiete zunächst getrennt voneinander zu betrachten. Die Verknüpfung der Gebiete untereinander erfolgt über die Lastterme auf der jeweils rechten Seite der Gleichungssysteme der Teilgebiete. Diese Gleichungssysteme können dann mit möglicherweise völlig unterschiedlichen Programmen gelöst werden, die optimal auf das betrachtete Teilgebiet abgestimmt sind. Hierbei ist die Konvergenz des Gesamtsystems zu prüfen. Für die einzelnen Teilgebiete werden in der Regel iterative Gleichungslöser verwendet. Ein weiterer Vorteil dieser Vorgehensweise ist die einfache Parallelisierung.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, alle Teilgebiete gleichzeitig in einem großen Gleichungssystem zu lösen. Hierbei werden die Teilgebiete implizit durch die Kopplungsbedingungen miteinander verknüpft, die zu zusätzlichen Einträgen auf der linken Seite des Gesamtgleichungssystems führen.

Des Weiteren ist zwischen strenger und schwacher Kopplung zu unterscheiden. Bei schwach gekoppelten Verfahren, die auch als gestaffelte Verfahren (*staggered methods* [72]) bezeichnet werden, erfolgt der Informationsaustausch in jede Richtung und jedem Berechnungsschritt nur einmal. Dieser Informationsaustausch kann zu Beginn des Berechnungsschritts erfolgen, so dass die Teilprobleme in der Folge parallel berechnet werden können. Alternativ kann ein Teilproblem mit den Kopplungsvariablen aus dem vorherigen Berechnungsschritt gelöst werden. Die daraus berechnete Lösung dient als Startwert für die Lösung eines anderen Teilproblems. Dieses Verfahren stellt einen sequentiellen Algorithmus dar, der in der Regel zu besseren Ergebnissen als die erste Variante führt, da zumindest für eines der Teilprobleme die aktuellen Kopplungsgrößen verwendet werden. Da für diese Verfahren jedoch die Lösungen der Teilprobleme nacheinander bestimmt werden, werden die Kopplungsbedingungen nicht exakt erfüllt, so dass verhältnismäßig kleine Schrittweiten gewählt müssen, um Stabilität und Genauigkeit zu gewährleisten. Die stark gekoppelten Verfahren, die auch als iterative Verfahren (*iterative staggered methods* [131]) bezeichnet werden, führen auf die gleiche Lösung wie ein monolithisches Verfahren, bei denen das gekoppelte Problem als ein Gesamtproblem behandelt und gelöst wird. Bei diesem Verfahren werden pro Berechnungsschritt mehrere Iterationen in jedem Teilgebiet durchgeführt, so dass die Kopplungsbedingungen am Ende der Berechnung exakt erfüllt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein stark gekoppeltes Verfahren verwendet, das zudem alle Teilgebiete gleichzeitig als ein Gesamtproblem betrachtet. Somit ist in jedem Berechnungsschritt ein Gleichungssystem zu lösen.

Die Kopplung, die die Interaktion zwischen flexibler Struktur und umgebendem Fluid beschreibt, wird an den Berührungs- oder Grenzflächen der beiden Gebiete mit Hilfe von Kopplungsbedingungen formuliert. Diese Bedingungen verknüpfen die physikalischen Größen der beiden Teilgebiete, hier die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  der Struktur und den Druck  $p$  im Fluidgebiet, miteinander. In Abbildung 3.13 ist schematisch ein solches Interaktionsproblem dargestellt. Auf dem Rand zwischen dem akustischen Fluid und der Struktur, im Folgenden mit  $\partial\Omega_{sf}$  bezeichnet, bewegen sich

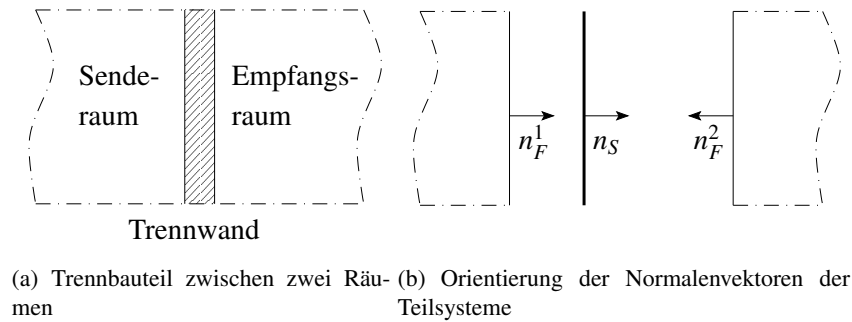


Abbildung 3.13: Kopplung von akustischem Fluid und Struktur

die Fluidpartikel und die Struktur zusammen normal zum Rand. Führt man den Normalenvektor  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_s$  ein, lautet die Verschiebungsrandbedingung

$$\mathbf{u}_s \mathbf{n} = \mathbf{u}_f \mathbf{n} \quad (3.56)$$

und die Kontinuitätsbedingung für den Druck

$$\sigma_{ij} n_j = -p. \quad (3.57)$$

Aus der Anwendung der Impulsgleichung an der Grenzfläche ergibt sich die zweite Kopplungsbedingung [142]. Diese lautet für den Frequenzbereich

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \omega^2 u_3. \quad (3.58)$$

Unter Verwendung dieser beiden Bedingungen können die Bewegungsgleichungen für die Struktur und die Helmholtzgleichung miteinander verknüpft werden. Es ergibt sich ein vollständig stark gekoppeltes Gleichungssystem, dass alle Wechselwirkungen zwischen den Teilgebieten vollständig beschreibt.

### 3.6 Modellierung verlustbehafteter Medien

In den vorherigen Abschnitten sind bisher nur ideale, verlustfreie Medien betrachtet worden. Dies ist eine stark idealisierte Annahme, die so nicht uneingeschränkt gilt, da in der Regel die Schwingungen realer Bauteile gedämpft sind. Somit ist es wichtig, das Modell zur Beschreibung bauakustischer Problemstellungen um Modelle zur Beschreibung verschiedener Dämpfungsmechanismen zu erweitern, die sowohl die Dämpfung im Fluid als auch die Dämpfung in der Struktur erfassen. Als Dämpfung bezeichnet man die Dissipation von potentieller und kinetischer Energie in Wärmeenergie. Dieser Vorgang ist irreversibel und geht mit der Zunahme der Entropie einher. Ein System mit Dämpfung ist nicht konservativ, d.h. die Summe aus potentieller und kinetischer Energie ändert sich über die Zeit [40]. Bei der Beurteilung von schwingungsfähigen Systemen ist die Dämpfung ein entscheidender Faktor, da sie die maximal auftretenden Amplituden festlegt. Im Gegensatz zur Masse oder der Steifigkeit ist die Dämpfung jedoch schwer messbar. Zudem sind häufig auch die Mechanismen, die der Dämpfung zu Grunde liegen unklar oder auch unbekannt, so dass eine genauere Beschreibung der physikalischen Eigenschaften nicht möglich ist. In der Literatur finden

sich eine Vielzahl von Dämpfungsmechanismen (vgl. z.B. [108]), die zur Beschreibung verschiedener Verlustmechanismen verwendet werden. Beispielfhaft seien hier nur viskose Dämpfung, Coulombsche Dämpfung, geometrische Dämpfung oder Strukturdämpfung genannt.

Im Rahmen numerischer Simulationen wird die Abbildung der Dämpfung in der Regel sehr stark vereinfacht. So wird im Bereich der Strukturdynamik häufig mit Hilfe der Rayleighdämpfung gearbeitet, bei der eine Dämpfungsmatrix aus der Linearkombination von Massen- und Steifigkeitsmatrix berechnet wird [22]. Da bei realen kontinuierlichen Systemen zumeist alle Schwingungsformen gleichmäßig und somit frequenzunabhängig gedämpft sind, wird oft ein Verlustfaktor  $\eta$  eingeführt (Modell der konstanten Hysterese). Dieser führt dann auf einen komplexen Elastizitätsmodul  $E^*$

$$E^* = E(1 + i\eta), \quad (3.59)$$

mit dessen Hilfe sich eine relativ einfache Spannungs-Dehnungs-Beziehung angeben lässt. Für übliche Baustoffe beträgt dieser Verlustfaktor etwa 0,01. Da die mechanischen Eigenschaften der Baustoffe jedoch stark von deren Zusammenstellung und der Herstellung abhängen, kann dieser Wert nur eine erste Näherung sein.

In der Natur ist häufig eine starke Frequenzabhängigkeit der inneren Verluste zu beobachten. Daher wurden andere Modelle entwickelt, die dies berücksichtigen. Beispiele dafür sind die Modelle von Voigt-Kelvin und Maxwell. Diese Materialmodelle werden auch als viskoelastische Materialien bezeichnet. In den folgenden beiden Abschnitten werden die Ansätze beschrieben, die im Rahmen dieser Arbeit zur Beschreibung der Dämpfung der Luft sowie der Struktur verwendet werden.

### 3.6.1 Viskoses Fluid

Die in Kapitel 3.3 hergeleitete Gleichung zur Beschreibung der Wellenausbreitung geht von verlustfreien Fluiden und Gasen aus. Im Allgemeinen sind die betrachteten Medien jedoch nicht verlustfrei, so dass diese Annahme eine starke Idealisierung darstellt.

Wird zu Gleichung (3.12) ein geschwindigkeitsproportionaler Term hinzugefügt

$$\Delta p = \frac{1}{c_F^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{R}{\rho_F c_F^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.60)$$

so können mit Hilfe dieses Terms die Verluste des Fluids beschrieben werden [138]. Gleichung (3.60) kann wiederum mit Hilfe des zeitharmonischen Ansatzes (3.13) in den Frequenzbereich überführt werden. Daraus ergibt sich die modifizierte Form der Helmholtzgleichung zu

$$\Delta p + \left( \frac{\omega^2}{c_F^2} + i\omega \frac{R}{\rho_F c_F^2} \right) p = \Delta p + \tilde{k}^2 p = 0, \quad (3.61)$$

wobei eine modifizierte Wellenzahl  $\tilde{k}$  eingeführt wird, die für kleine Strömungswiderstände  $R$  durch Reihenentwicklung zu

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_F^2} + i\omega \frac{R}{\rho_F c_F^2}} \approx \frac{\omega}{c_F} \left( 1 + i \frac{R}{2\rho_F \omega} \right) = k + i\mu, \quad (3.62)$$

approximiert werden kann.  $k$  ist die verlustfreie Wellenzahl und  $\mu$  wird als Absorptionskoeffizient bezeichnet, der im Folgenden zur Beschreibung der inneren Verluste von Fluiden verwendet wird. Für diese innere Dämpfung gibt es verschiedenste Ursachen. Im folgenden Abschnitt werden die

drei wichtigsten Mechanismen kurz vorgestellt. Eine ausführliche Beschreibung findet sich bei Meyer [138]

Der erste Mechanismus ist die innere Reibung. Die in realen Gasen und Flüssigkeiten auftretenden Schubspannungen führen auf einen Abklingkoeffizienten

$$\mu_1 = \frac{2}{3} \eta \frac{\omega^2}{\rho_F c_F^3}. \quad (3.63)$$

Darin ist  $\eta$  die dynamische Viskosität. Sie beträgt für Luft bei 20°C rund  $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ g}/(\text{cm} \cdot \text{s})$ . Ein weiterer wichtiger Mechanismus ist die Wärmeleitung. Druckunterschiede erzeugen in einem Fluid ein Temperaturfeld, das Wärmeströme von kalt nach warm bewirkt. Diese Zustandsänderung verläuft in realen Fluiden nicht, wie in Kapitel 3.3 angenommen, adiabatisch. Für kleine Dämpfungen resultiert daraus der Faktor

$$\mu_2 = \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \chi \frac{\omega^2}{\rho_F c_v c_F^3}. \quad (3.64)$$

Hierin ist  $c_v$  die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen,  $\kappa$  der Adiabatenexponent und  $\chi$  die Wärmeleitfähigkeit. Für das Medium Luft gilt näherungsweise  $\mu_2 \approx 0,54\mu_1$ . Die durch die innere Reibung und die Wärmeleitung bewirkte Dämpfung wird auch als klassische Dämpfung bezeichnet. Sie ist in Wasser erheblich kleiner als in Luft.

Die sogenannte molekulare Relaxation leistet ebenfalls einen nennenswerten Beitrag zur Beschreibung von Verlusten in Fluiden. Die kinetische Energie einatomiger Gase beruht auf deren Translationsbewegung. Bei mehratomigen Molekülen wird kinetische Energie zusätzlich durch Rotationsbewegung und Schwingungen der Atome im Molekülverband gespeichert. Wird diese Gesamtenergie plötzlich erhöht, nehmen auch die Translations- und die Rotationsenergie sehr schnell zu. Aufgrund der Stöße zwischen den Molekülen baut sich die Schwingungsenergie jedoch deutlich langsamer auf. Dadurch nehmen sowohl die Rotations- und die Translationsenergie als auch der Druck im Gas ab. Die Zeitkonstante dieses Vorgangs bezeichnet man auch als Relaxationszeit.

Diese Relaxationszeit von Gasen lässt sich durch Beimengungen oder Verunreinigungen sehr stark beeinflussen. Bei Luft verkleinert sie sich zusätzlich sehr stark mit zunehmender relativer Luftfeuchte  $\phi$ . Für relative Luftfeuchtigkeiten  $\phi$  von mehr als 30% kann die molekulare Relaxation näherungsweise zu

$$\mu_3 = \frac{8[\%]}{\phi} \left( \frac{f}{[\text{kHz}]} \right)^2 \frac{1}{10^3} \quad (3.65)$$

berechnet werden. Der Verlustfaktor  $\mu$  ergibt sich nun als Summe der obigen drei Verlustfaktoren

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3. \quad (3.66)$$

### 3.6.2 Strukturdämpfung

Neben der Dämpfung im Fluid Luft ist auch die Dämpfung des Materials, aus dem die betrachteten Bauteile bestehen, zu berücksichtigen. Diese Dämpfung kann mit Hilfe eines geeigneten Materialmodells, das im folgenden Abschnitt vorgestellt wird, erfasst werden. Für viele Werkstoffe hängen die momentanen Verzerrungen nicht nur von den momentanen Spannungen ab. Häufig spielt auch die gesamte Spannungsgeschichte eine wichtige Rolle. Somit kann das Werkstoffverhalten nicht hinreichend mittels eines linear-elastischen Gesetzes beschrieben werden. Wird

jedoch ein linear-viskoelastisches Gesetz verwendet, können diese Gedächtniseffekte im Materialmodell berücksichtigt werden.

Eine Möglichkeit zur Beschreibung von linear-elastischem Werkstoffverhalten ist die Verwendung von Gedächtnisintegralen. Ihre Verwendung führt jedoch bei den Bewegungsgleichungen auf sogenannte Integro-Differentialgleichungen, deren Lösung aufwändig ist.

Verknüpft man hingegen Spannungen und Verzerrungen mit ihren jeweiligen Zeitableitungen, so erhält man die Operatormethode. Hier treten jedoch üblicherweise höhere Ableitungsordnungen als die Zweite in der Zeit auf. Dadurch ist die Angabe von Anfangsbedingungen, die zur Lösung des Problems benötigt werden, erschwert.

Alternativ zur hier verwendeten Formulierung wäre auch die Verwendung eines Materialmodells auf der Basis fraktionaler Zeitableitungen denkbar. In fraktionalen rheologischen Modellen werden die ganzzahligen Zeitableitungen der Dämpferelemente in den Werkstoffgleichungen durch fraktionale Zeitableitungen ersetzt. Diese Elemente des rheologischen Modells interpolieren somit zwischen dem Feder- und dem Dämpferelement. So zeigen Heymans und Bauwens, dass aus den Werkstoffgleichungen fraktaler rheologischer Modelle Materialgleichungen folgen, die fraktionale Zeitableitungen beinhalten [94]. Diese fraktionalen Modelle führen im Unterschied zu klassischen rheologischen Modellen zu diskreten Retardations- und Relaxationsspektren. Selbst für eine geringe Anzahl von Modellparametern kann mit Hilfe dieser Modelle das viskose Verhalten eines Werkstoffs über große Zeit- und Frequenzbereiche beschrieben werden. Ein Überblick über die aktuellen Anwendungsbereiche fraktionaler Zeitableitungen findet sich bei Podlubny [153]. Eine Übersicht über die Modellierung viskosen Materialverhaltens mit Hilfe fraktionaler Zeitableitungen findet sich z.B. bei Rossikhin [155] oder Surguladze [177]. Analog zur zuvor beschriebenen Operatormethode ergeben sich bei der Verwendung nicht ganzzahliger Zeitableitungen Probleme bei der Formulierung der Anfangsbedingungen. Zudem können in einigen Parameterbereichen die thermodynamischen Prinzipien verletzt sein [156].

Sind sowohl die Systembelastung als auch die Systemantwort harmonisch, kann eine Darstellung mit komplexen Werkstoffparametern verwendet werden. Deren Real- und Imaginärteil können als Speicher- bzw. Verlustmodul gedeutet werden. Die Werkstoffgrößen sind dann von der Frequenz abhängig, wodurch auch die Differentialgleichungen frequenzabhängige Koeffizienten enthalten. Bei Lasten mit Oberwellen, die bei periodischen aber nicht rein harmonischen Signalen sofort vorliegen, ist eine Zerlegung dieses Signals und eine Synthese der Teilergebnisse nach Fourier notwendig. Um dies durchführen zu können, müssen die Werkstoffparameter für alle relevanten Frequenzen vorliegen und somit gemessen sein.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Parametermodell verwendet, das auf inneren Variablen basiert [107]. Bei dieser Methode ergeben sich lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Des Weiteren ist diese Methode auf keine bestimmte Signalform beschränkt, da sie im Zeitbereich operiert. Die Ergebnisse können jedoch nachträglich in den Frequenzbereich transformiert werden, wodurch ihre Anwendung in einem Modell, welches im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt wird, möglich ist [163].

Es wird die allgemeine Form des Maxwellkörpers, wie er in Abbildung 3.14 dargestellt ist, zu Grunde gelegt. Details zur verwendeten Formulierung finden sich bei Schmelzer [163] oder Christensen [40]. Der allgemeine Maxwellkörper besteht aus der Parallelschaltung einer Feder, eines Dämpfers sowie einer Anzahl von Maxwellelementen. Unter der Annahme eines harmonischen Zeitverlaufs lässt sich für das System aus Abbildung 3.14 ein komplexer, frequenzabhängiger Er-

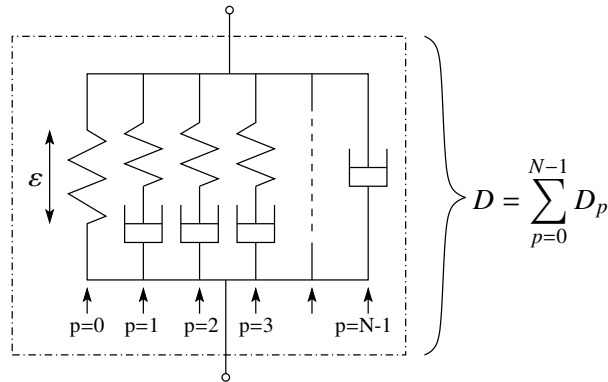


Abbildung 3.14: Allgemeine Form des verwendeten Maxwellmodells

satzmodul aus der Summe der Moduln der  $N$  Parallelelemente bilden

$$D(\omega) = D_0 + \sum_{p=1}^{N-2} D_i \frac{i\omega}{i\omega + b_i} + i\omega D_{fast}. \quad (3.67)$$

In Gleichung (3.67) beschreibt der mittlere, komplexe Summand die verschiedenen Maxwellelemente. Die Feder- sowie die Dämpferkonstante des  $p$ -ten Maxwellelements werden in die Parameter  $D_p$  und  $b_p$  umgerechnet. Darin beschreibt  $b_p$  den Frequenzbereich, in dem das Maxwellelement Einfluss auf das Werkstoffverhalten nimmt. Der erste Term in Gleichung (3.67) ist die Konstante der Feder und beschreibt den statischen Anteil des Ersatzmoduls für  $b_p = 0$ . Der rein imaginäre Term  $D_{fast}$  erfasst hingegen den Einfluss des Dämpferelements.

Der im Rahmen dieser Arbeit verwendete Satz von Parametern wurde an der Physikalisch Technischen Bundesanstalt von Kling und Schmelzer gemessen [115]. Der Verlauf des Elastizitätsmoduls von Plexiglas über der Frequenz ist für die ebendort angegebenen ermittelten Konstanten beispielhaft in Abbildung 3.15 dargestellt. Dieses Material wurde für die Herstellung der Modellprüfstände, die in Kapitel 7 untersucht werden, verwendet. Die Parameter wurden zunächst durch Messungen an Probekörpern bestimmt und dann mit Hilfe einer Parameteridentifikation angepasst [115]. Sowohl die direkt gemessenen Materialparameter als auch die durch die Parameteridentifikation ermittelten Werte können direkt vom im Rahmen dieser Arbeit entwickelten FE-Löser verarbeitet werden.

### 3.7 Modellierung poröser Medien

Zur Verbesserung ihrer bauphysikalischen Eigenschaften werden leichte Trennwände häufig mehrschalig ausgeführt. Die Zwischenräume werden in der Regel mit porösen Dämmstoffen wie Mineral- oder Steinwolle gefüllt. Diese poröse Zwischenschicht absorbiert einen Teil der Schallenergie und hat damit einen großen Einfluss auf das Schalldämmverhalten des betrachteten Bauteils. Daher muss sie durch eine geeignete Theorie im Modell erfasst werden.

Eine Möglichkeit zur Modellierung von porösen Materialien besteht in der Verwendung des äquivalenten Fluidansatzes nach Champoux und Allard [37]. Dieser Ansatz eignet sich gut für die Modellierung von im Hochbau verwendeten Dämmstoffen, da es sich hierbei meist um sehr weiche Materialien handelt. Der Vorteil dieses Verfahren gegenüber den übrigen Verfahren, die im

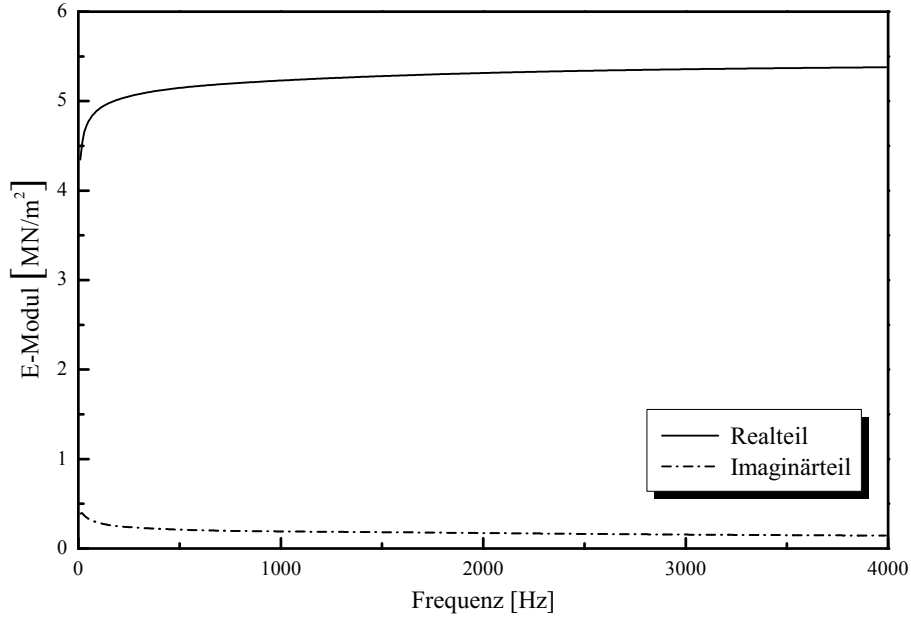


Abbildung 3.15: Real- und Imaginärteil des Elastizitätsmoduls von Plexiglas als Ergebnis einer Parameteridentifikation [115]

Folgendes vorgestellt werden, besteht in der Tatsache, dass prinzipiell keine neuen Freiheitsgrade in die Formulierung eingeführt werden und sich das resultierende Gesamtgleichungssystem nicht weiter vergrößert. Bei dem in [37] vorgestellten Ansatz werden die akustischen Eigenschaften des porösen Materials durch zwei frequenzabhängige Parameter, die effektive Dichte  $\rho_{eff}(\omega)$  und den effektive Kompressionsmodul  $K_{eff}(\omega)$ , beschrieben. Mit Hilfe dieser beiden Werte kann eine, ebenfalls frequenzabhängige, effektive Schallgeschwindigkeit

$$c_{eff,F}(\omega) = \sqrt{\frac{K_{eff}(\omega)}{\rho_{eff}(\omega)}} \quad (3.68)$$

für das akustische Fluid angegeben werden. Daraus ergibt sich dann eine modifizierte Form der Helmholtzgleichung (3.14)

$$\Delta p + \frac{\rho_{eff}(\omega)}{K_{eff}(\omega)} p = 0. \quad (3.69)$$

In [2] finden sich Formeln zur Bestimmung der effektiven Kennwerte sowie Untersuchungen zum Einfluss der verschiedenen Eingangsgrößen auf die Schalldämmung.

Ein ähnlicher Ansatz findet sich in [13]. Dort wird das poröse Material mit Hilfe von effektiven Werten für den Strömungswiderstand und einen sogenannten Strukturfaktor beschrieben.

Die Theorie poröser Medien stellt einen alternativen Ansatz zur Beschreibung poroelastischer Kontinua [66] dar. Analog zu Biot'schen Theorie, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird, sind auch bei der Theorie poröser Medien die Verschiebungen sowie der Druck des Porenfluids die primären Variablen. Unter der Annahme kleiner Verformungen sowie kleiner Verformungsgradienten und einem linear elastischen Material ergeben sich für beide Formulierungen ähnliche



Differentialgleichungen, deren Koeffizienten jedoch physikalisch unterschiedlich zu deuten sind. Vergleicht man die Koeffizienten beider Formulierungen miteinander, so stößt man insbesondere auf die sog. *apparent mass density*, die in der Biotschen Theorie eingeführt wird. Einen detaillierten Vergleich zwischen der Theorie poröser Medien und der Theorie nach Biot findet sich bei Schanz und Diebels [160].

Eine andere Möglichkeit besteht in der Modellierung des Gebietes als poroelastisches Medium. Diese geht im Wesentlichen auf Biot [29, 30] zurück. Diese Theorie berücksichtigt sowohl die Bewegungen der Fluid- als auch die der Festkörperphase. Dadurch werden drei Wellen der Schallausbreitung, eine Schubwelle und zwei Dichtewellen, gleichzeitig erfasst. Es ergibt sich ein gekoppeltes Gleichungssystem mit wenigstens vier Freiheitsgraden: den drei Verschiebungen des Festkörperskeletts und dem Druck des Porenfluids. Daneben existieren weitere Formulierungen, die auf den Verschiebungen von Fluid und Festkörperskelett [148] oder auf den Verschiebungen des Festkörperskeletts und den dazugehörigen Relativverschiebungen des Fluids beruhen [43].

Im folgenden Abschnitt sollen die Grundgleichungen der Theorie nach Biot vorgestellt werden. Eine ausführliche Herleitung findet sich beispielsweise bei Atalla et al. [11]. Das von Biot vorgeschlagene Modell gilt für zweiphasige poröse Materialien. Die Porosität  $\phi$  kennzeichnet den Volumenanteil der Fluidphase wohingegen die Festkörperphase den restlichen Volumenanteil belegt. Das Fluid ist kontinuierlich, das Korngerüst, dessen Verschiebungen und Verzerrungen klein sind, ist linear elastisch und isotrop. Die Gleichgewichtsbedingung für das Korngerüst lautet

$$\sigma_{ij,j}^S = (1 - \phi)\rho_S \ddot{u}_i + f_i^{FS}. \quad (3.70)$$

Darin ist  $\sigma_{ij}^S$  der elastische Spannungstensor,  $u_i$  der Verschiebungsvektor und  $f_i^{FS}$  der Kraftvektor der Fluidkräfte, die auf das Korngerüst einwirken. Analog lautet die Gleichgewichtsbedingung für das Fluid

$$\sigma_{ij,j}^F = \phi \ddot{U}_i + f_i^{SF} \quad (3.71)$$

mit dem isotropen Fluidspannungstensor  $\sigma_{ij,j}^F$ , den Fluidverschiebungen  $U_i$  und dem Vektor  $f_i^{SF}$  der Kräfte, die vom Korngerüst auf das Fluid ausgeübt werden. Die reziproken Interaktionskräfte zwischen Fluid und Struktur setzen sich aus der Summe zweier Terme zusammen

$$f_i^{SF} = -f_i^{FS} = \rho_{12}(\ddot{u}_i - \ddot{U}_i) - \tilde{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i). \quad (3.72)$$

Der erste Term berücksichtigt die Kopplung der Massen und ist proportional zur relativen Beschleunigung der beiden Phasen. Der zweite Term beschreibt die viskosen Kräfte, die aus dem Geschwindigkeitsunterschied zwischen Fluid und Korngerüst resultieren. Mit  $\sim$  werden in diesem Abschnitt frequenzabhängige, komplexe Größen gekennzeichnet.

Der Ausdruck  $\rho_{12} = \phi\rho_F(1 - \alpha_\infty)$  hängt von der Fluidichte  $\rho_F$ , der Porosität  $\phi$  sowie der Tortuosität  $\alpha_\infty$ , die die Verwundenheit der Poren beschreibt, ab. Der komplexe viskose Dämpfungskoeffizient  $\tilde{b}$  kann für den tiefen Frequenzbereich approximiert werden [3]. Details finden sich in Anhang A.

Im nächsten Schritt werden nun die Gleichungen (3.70) und (3.71) analog zu den Freiheitsgraden der linear elastischen Struktur (s. Gleichung (3.43)) in den Frequenzbereich überführt. Ebenso wie in den vorherigen Abschnitten wird auf das Symbol  $\hat{\phantom{x}}$  zur expliziten Kennzeichnung der Amplitude verzichtet. Damit lauten die Spannungstensoren für das Korngerüst

$$\sigma_{ij,j}^S + \tilde{\rho}_{11}\omega^2 u_i + \tilde{\rho}_{12}\omega^2 U_i = 0 \quad (3.73)$$

bzw. für das Fluid

$$\sigma_{ij,j}^F + \tilde{\rho}_{22}\omega^2 U_i + \tilde{\rho}_{12}\omega^2 u_i = 0. \quad (3.74)$$

Die Ausdrücke  $\tilde{\rho}_{11}$ ,  $\tilde{\rho}_{12}$  und  $\tilde{\rho}_{22}$  sind zu

$$\tilde{\rho}_{11} = (1 - \phi)\rho_S - \rho_{12} + \frac{\tilde{b}}{i\omega}, \quad (3.75)$$

$$\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} - \frac{\tilde{b}}{i\omega} \text{ und} \quad (3.76)$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \phi\rho_F - \rho_{12} + \frac{\tilde{b}}{i\omega} \quad (3.77)$$

gegeben. Drückt man den Spannungstensor des Fluids nun durch den Fluiddruck  $p$  anstatt durch die Fluidverschiebungen  $U_i$  aus, so lautet dieser

$$\sigma_{ij}^F = -\phi p \delta_{ij}. \quad (3.78)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung können nun die Verschiebungen  $U_i$  des Fluids bestimmt werden

$$U_i = \frac{\phi}{\tilde{\rho}_{22}\omega^2} p_{,i} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_i \quad (3.79)$$

und in Gleichung (3.73) substituiert werden. Damit lautet der Spannungstensor des Korngerüsts

$$\sigma_{ij,j}^S + \omega^2 \tilde{\rho} u_i + \frac{\phi \tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,i} = 0. \quad (3.80)$$

Die konstitutive Gleichung für die Fluidphase

$$-p = Q\varepsilon_v + \alpha Q\varepsilon_S \quad (3.81)$$

mit dem Fluss des Porenfluids  $\varepsilon_v = \phi(U_{i,i} - u_{i,i})$  und der Volumenänderung  $\varepsilon_S = u_{i,i}$ .  $\alpha$  ist der sogenannte Biot Parameter. Der Gesamtspannungstensor  $\sigma_{ij}^S$  lässt sich in zwei Tensoren zerlegen

$$\sigma_{ij,j}^S = \sigma_{ij,j} + \phi p \delta_{ij}, \quad (3.82)$$

wobei der erste Term der Divergenz des Spannungstensors für ein dreidimensionales Kontinuum entspricht und der zweite Term den Fluiddruck repräsentiert. Der modifizierte Spannungstensor für das dreidimensionale Kontinuum

$$\sigma_{ij} = (\lambda + \alpha^2 Q) u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \alpha \phi Q (U_{k,k} - u_{k,k}) \delta_{ij} \quad (3.83)$$

berücksichtigt auch die Fluidphase. Ersetzt man nun die Verschiebungen  $U_i$  der Fluidphase durch Gleichung (3.79), lässt sich der Spannungstensor zu

$$\sigma_{ij}^S = \bar{\sigma}_{ij}^S - (\alpha - \phi) \phi p \delta_{ij} \quad (3.84)$$

umformen. Der darin enthaltene Tensor  $\bar{\sigma}_{ij}^S$

$$\bar{\sigma}_{ij}^S = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.85)$$

beschreibt die Spannungen, die in einem elastischen Festkörper auftreten würden, der dem gleichen Verschiebungsfeld wie das Korngerüst unterliegt. Mit Hilfe eines mikro-makro Ansatzes kann in obiger Formulierung ein frequenzabhängiger Kompressionsmodul  $Q(\omega)$  und ein ebenfalls frequenzabhängiger Fließwiderstand  $R(\omega)$  auf Grundlage einer viskosen charakteristischen Länge  $\Lambda_v$  und einer thermalen charakteristischen Länge  $\Lambda_t$  eingeführt werden [3]. Dadurch wird es möglich, den Einfluss der Mikrostruktur im Berechnungsmodell zu erfassen. Substituiert man nun (3.84) in (3.80), so erhält man die Verschiebungs-Druck-Formulierung nach Atalla [11]

$$\bar{\sigma}_{ij,j}^S + \omega^2 \tilde{\rho} u_i + \tilde{\gamma} p_{,i} = 0 \quad (3.86)$$

mit

$$\tilde{\gamma} = \frac{\phi \tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - (\alpha - \phi). \quad (3.87)$$

Gleichung (3.86) ist ähnlich zur Gleichgewichtsbedingung eines dreidimensionalen Kontinuums. Sie enthält jedoch zusätzlich eine modifizierte Dichte  $\tilde{\rho}$  und einen Anteil der gekoppelten Verschiebung von Korngerüst und Porenfluid.

Für die Herleitung der Gleichung für die Fluidphase ist der Gradient in Gleichung (3.79) auszuwerten. Unter Berücksichtigung von Gleichung (3.81) ergibt sich

$$\frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} + \omega^2 \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p - \omega^2 \tilde{\gamma} u_{i,i} = 0. \quad (3.88)$$

Diese nicht-homogene reduzierte Wellengleichung beschreibt die Druckverteilung in der Fluidphase. Der Unterschied zur Helmholtzgleichung (3.14) besteht in der modifizierten Wellenzahl und dem zusätzlichen Quellterm, der von den Verschiebungen des Korngerüsts herrührt.

In Abschnitt 7.3 werden die beiden vorgestellten Modelle zur Beschreibung poröser Materialien verwendet und miteinander verglichen.

## 4 Numerische Umsetzung

Das in Kapitel 3 vorgestellte vollständig gekoppelte Modell zur Simulation von bauakustischen Problemstellungen soll im Folgenden gelöst werden. Nur in sehr wenigen Fällen ist dies analytisch möglich. Daher soll ein numerisches Berechnungsverfahren zum Einsatz kommen, dass in den folgenden Abschnitten beschrieben wird.

Sowohl für die Lösung des abgeschlossenen akustischen Fluids als auch der Struktur soll die Finite Elemente Methode (FEM) verwendet werden, da sich die FEM im Gegensatz z.B. zur Randelementmethode sehr gut zur Beschreibung komplexer Geometrien und Randbedingungen sowie inhomogener Wandaufbauten eignet.

Im ersten Schritt soll die in Abschnitt 4.1 vorgestellte Differentialgleichung zur Beschreibung der Wellenausbreitung in idealen, kompressiblen Fluiden mit Hilfe der FEM gelöst werden. Dazu wird zunächst die schwache Form aufgestellt und diese dann diskretisiert. Durch die Diskretisierung und einige weitere Effekte wird der Fehler, der durch die numerische Lösung des Problems entsteht, bestimmt. Um eine Aussage über die Genauigkeit der Lösung machen zu können, wird daher auf die Möglichkeiten zur Abschätzung und Reduzierung dieses Fehler eingegangen.

In Abschnitt 4.2 werden die Finiten Elemente für platten- und scheibenartige Bauteile vorgestellt, die das Schwingungsverhalten der trennenden und flankierenden Bauteile beschreiben. Diese Elemente, die auf einer Weggrößenformulierung basieren, neigen unter bestimmten Voraussetzungen zu Versteifungseffekten, die jedoch in der Regel bereits auf Elementebene eliminiert werden können. Im Rahmen dieser Arbeit wird die *Discrete Shear Gap* Methode verwendet, um diese Versteifungseffekte zu minimieren.

Wie in Abschnitt 3.2.4 beschrieben, werden an den Kreuzungspunkten von Wänden Biegewellen in inplane Wellen transformiert und umgekehrt. Um auch diesen Effekt im numerischen Modell erfassen zu können, wird durch Überlagerung von Scheibe und Platte eine einfache, aber effiziente Formulierung zur Beschreibung des Verhaltens von derartigen ebenen Schalentragsystemen entwickelt. Dieses Vorgehen wird in Abschnitt 4.2.1 beschrieben.

Die Wechselwirkungseffekte zwischen akustischem Fluid und elastischer Struktur werden durch Diskretisierung der in Abschnitt 3.5 vorgestellten Kopplungsbedingungen im numerischen Modell berücksichtigt. Die zur Beschreibung der Kopplung erforderlichen Terme werden in Abschnitt 4.3 vorgestellt.

Zur Untersuchung der Längsdämmung von flankierenden Bauteilen ist, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, auch die Schallausbreitung in unendlichen Fluidgebieten zu modellieren, um die Reflexion von Schallwellen an den künstlichen Abbruchrändern der Diskretisierung zu unterbinden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden dazu die Randelementmethode (REM) und die *Scaled Boundary Finite Element Method* (SBFEM) verwendet. Beide Verfahren werden in Abschnitt 4.6 vorgestellt und miteinander verglichen. Zur Erfassung der Wechselwirkungen zwischen dem unendlichen Fluidgebiet und dem gekoppelten Modell sind diese Teilgebiete miteinander zu koppeln. Die Dis-

diskretisierung dieser Kopplung wird in Abschnitt 4.7 vorgestellt.

Abschließend werden in Abschnitt 4.8 Details der Implementierung und der Effizienzsteigerung des FE-Lösers vorgestellt. Das aus der Diskretisierung der schwachen Formen resultierende Gleichungssystem ist abschließend numerisch zu lösen. Im Rahmen dieser Arbeit werden direkte Verfahren zur Gleichungslösung verwendet, die in der Lage sind, die Symmetrie des Gesamtgleichungssystems (4.38) auszunutzen. Diese Symmetrie wird jedoch ggf. durch Kopplung der FE Formulierung mit der Randelementformulierung zerstört, so dass auch Verfahren für die Lösung allgemeiner, unsymmetrischer Gleichungssysteme benötigt werden. Häufig werden iterative Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems verwendet. Diese iterativen Verfahren werden in Abschnitt 4.1 ebenfalls betrachtet und in Bezug auf ihre Anwendbarkeit für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Problemstellungen bewertet.

## 4.1 FEM für die Wellenausbreitung in akustischen Fluiden

Zur Beschreibung der Wellenausbreitung in akustischen Fluiden wird die FEM verwendet. Dieses Verfahren eignet sich besonders für die im Abschnitt 7.4 zu betrachtenden Innenraumprobleme, da komplexe Geometrien und eine Vielzahl der in der Bauakustik üblichen Randbedingungen erfasst werden können. Nach der Herleitung der schwachen Form wird diese mit Hilfe geeigneter Volumenelemente diskretisiert. Danach werden Möglichkeiten aufgezeigt, mit deren Hilfe der Näherungsfehler, der aus der Diskretisierung der schwachen Form durch Finite Elemente resultiert, reduziert werden kann. Abschließend werden verschiedene Gleichungslöser, die auf das Lösen von aus der Diskretisierung der Helmholtzgleichung resultierenden Gleichungssystemen angepasst sind, kurz vorgestellt und miteinander verglichen.

### 4.1.1 Schwache Form

Im Folgenden wird die Finite Elemente Methode verwendet, da für die in Abschnitt 1.1 vorgestellten Verfahren in der Regel noch keine Formulierungen für Platten- und Scheibentragwerke existieren oder die Kopplung mit FE-Formulierungen für derartige Tragwerke nicht ohne weiteres zu formulieren ist.

Die schwache Form der Helmholtzgleichung ergibt sich durch die Multiplikation der Helmholtzgleichung (3.14) mit einer zunächst beliebigen Wichtungsfunktion  $\tilde{w}$  und Integration über das zu untersuchende Fluidgebiet  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \tilde{w} (\Delta p + k^2 p) \, d\Omega = 0. \quad (4.1)$$

Führt man nun die partielle Integration durch, so erhält man

$$\int_{\Omega} (\nabla \tilde{w} \nabla p + k^2 \tilde{w} p) \, d\Omega - \int_{\Gamma} \tilde{w} \frac{\partial p}{\partial n} \, d\Gamma = 0. \quad (4.2)$$

Das Oberflächenintegral über den Rand  $\Gamma$  des betrachteten Gebietes kann dazu verwendet werden, verschiedene Arten von physikalischen Randbedingungen in das Modell zu integrieren. Nachfolgend soll kurz auf die verschiedenen Randbedingungen und deren Implementierung im Modell eingegangen werden.

Bei einer schallharten Wand ist die Änderung des Drucks in Normalenrichtung Null. Dies bedeutet, dass

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (4.3)$$

gilt und somit das Randintegral aus Gleichung (4.2) ebenfalls Null ergibt.

Bei einer flexiblen Wand ergibt sich aus dem Gleichgewicht der Verschiebungen der Wand in Normalenrichtung und der Verschiebung der Fluidpartikel eine der Kopplungsbedingungen für die Interaktion von elastischer Struktur mit akustischen Fluid (vgl. Kapitel 3.5). Des Weiteren kann diese Bedingung zur Modellierung von Punktquellen durch am Rand vorgegebene Verschiebungen verwendet werden.

Für die Modellierung von Wänden mit schallabsorbierendem Material gibt es verschiedenste Möglichkeiten, von denen einige bereits in Abschnitt 3.7 vorgestellt wurden. Als erste Näherung können diese Materialien als akustische Impedanz im Modell berücksichtigt werden [36]. Diese Impedanz  $Z_i^n$  am Knoten  $i$ , die häufig auch als Wellenwiderstand oder Punktimpedanz bezeichnet wird, ist durch das Verhältnis aus Schalldruck und Schallschnelle in Normalenrichtung

$$Z_i^n = \frac{p_i}{v_i^n} \quad (4.4)$$

definiert. Damit ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial n} = i \frac{\rho_f \omega}{Z_i^n} p_i. \quad (4.5)$$

Dieser Term lässt sich wiederum direkt in Gleichung (4.2) einsetzen. In [36] gibt Cederfeldt eine effiziente Methode zur Implementierung dieser lokal agierenden Randknoten in die Steifigkeitsmatrix an. Die im allgemeinen Fall komplexe, frequenzabhängige Impedanz wird in der Regel durch Messungen im Hallraum oder Kundtschen Rohr bestimmt [50].

Ein vorgeschriebener Schalldruck  $p_a$  kann analog zu vorgeschriebenen Weggrößen einer auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen beruhenden FE Formulierung für die elastische Struktur entweder mittels Lagrangescher Multiplikatoren oder durch Anwendung des Penaltyverfahrens berücksichtigt werden [22, 209].

#### 4.1.2 Diskretisierung

Verwendet man, analog zur Methode von Galerkin, für die Wichtungs- und die Ansatzfunktionen den gleichen Satz von Polynomen  $N$  an den  $k$  Knoten des Elements, um die gesuchten Drücke  $p_i$  an diesen  $k$  Knoten zu diskretisieren

$$\tilde{w}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^k N_i(\xi, \eta, \zeta) \tilde{w}_i \quad p(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^k N_i(\xi, \eta, \zeta) p_i, \quad (4.6)$$

dann lautet die diskretisierte Form von Gleichung (4.2) in Matrixschreibweise

$$[\mathbf{K}^F - \omega^2 \mathbf{M}^F] \mathbf{p} = \mathbf{f}^F. \quad (4.7)$$

Darin ist  $\mathbf{K}^F$  die Steifigkeits- oder auch Kompressibilitätsmatrix

$$K_{rs}^F = \int_{\Omega} \nabla N_r \nabla N_s \, d\Omega \quad (4.8)$$

und  $\mathbf{M}^F$  die Massenmatrix

$$M_{rs}^F = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} N_r N_s \, d\Omega. \quad (4.9)$$

In den Lastvektor  $\mathbf{f}^F$  gehen die oben beschriebenen physikalischen Randbedingungen ein. Für einen lokal agierenden Randknoten lautet der zugehörige Lastvektor

$$f_r^F = i \frac{\omega}{c_F} \int_{\Gamma} N_r d\Gamma. \quad (4.10)$$

Bei der Auswahl der Elemente ist darauf zu achten, dass die Konvergenzkriterien für die Ansatzfunktionen erfüllt werden. Für die Fluidvolumenelemente sind  $C^0$ -stetige Ansätze ausreichend, da in den Integralen der Gleichungen (4.8)-(4.10) maximal erste Ableitungen auftreten. Um später die Auswertung der Kopplungsterme zwischen Fluidelementen und Strukturelementen zu vereinfachen, sind Hexaederelemente mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen implementiert worden. In Abbildung 4.1 ist das verwendete trilineare Hexaederelement mit acht Knoten (Hex8) dargestellt. Die Ansatzfunktionen setzen sich aus dem Produkt von drei Lagrangepolynomen er-

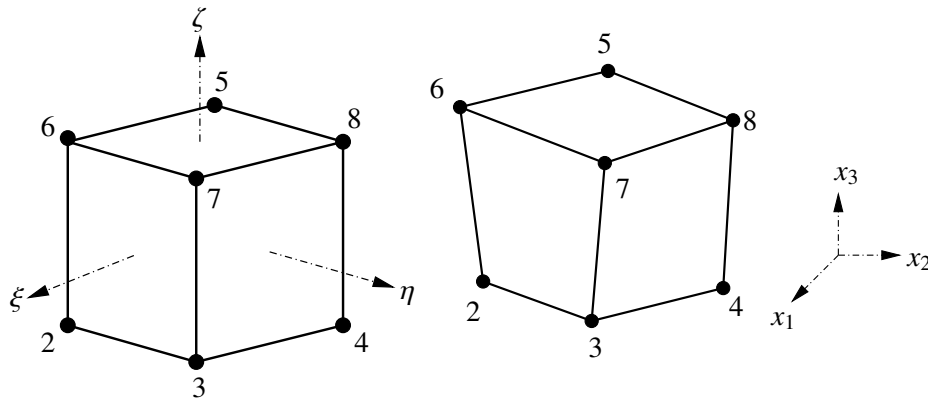


Abbildung 4.1: Das Hex8 Element mit trilinearen Ansatzfunktionen als Einheitswürfel und in verformter Geometrie

ster Ordnung in die drei Koordinatenrichtungen zusammen. Die zu Grunde liegenden Polynome können [209] entnommen werden. Das Hexaederelement mit 27 Knoten (Hex27) ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

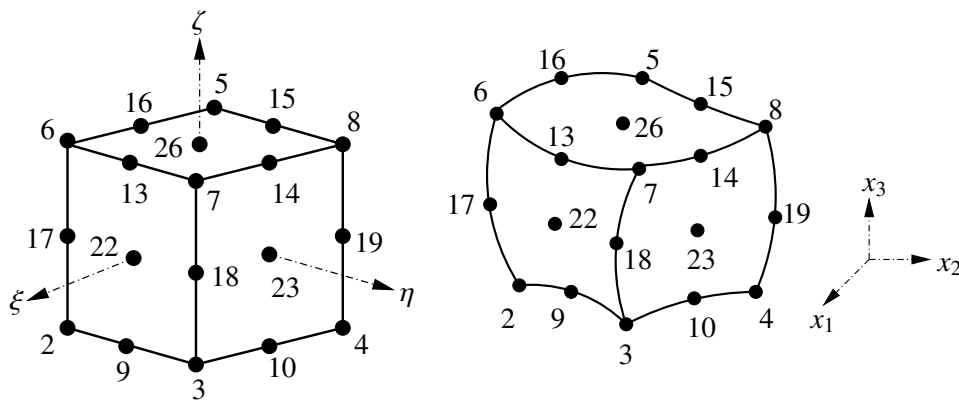


Abbildung 4.2: Das Hex27 Element mit triquadratischen Ansatzfunktionen als Einheitswürfel und in verformter Geometrie

Es verwendet Lagrangepolynome 2. Ordnung, die ebenfalls in [209] angegeben sind.

### 4.1.3 Fehlerabschätzung

Bei der numerischen Lösung der Helmholtzgleichung mit Hilfe der Galerkin FEM gibt es zwei Effekte, die die Güte der Lösung entscheidend beeinflussen. Mit zunehmender Wellenzahl  $k$  nimmt die Güte der numerischen Lösung immer stärker ab [104, 105]. Dieser Effekt wird als Pollutioneffekt bezeichnet. Entscheidend ist dabei, dass die Wellenzahl  $k$  der berechneten Lösung sich von der Wellenzahl der exakten Lösung unterscheidet. Babuška gibt in [16, 15] Möglichkeiten zur Abschätzung des Fehlers an und stellt in [14] eine zweidimensionale FE Formulierung vor, die den Pollutioneffekt reduziert. Dieses Problem tritt auch bei gekoppelten Problemen auf. So stellen Thompson und Sankar eine Formulierung zur Reduktion der Dispersion für ein gekoppeltes System aus Reissnerplatte und akustischem Fluid vor [187]. Eine andere Möglichkeit besteht in der Verwendung modifizierter Ansatzfunktionen wie z.B. Bernsteinpolynome, die auch für dreidimensionale Probleme effizient anwendbar erscheinen und die Rechenzeit signifikant reduzieren [151]. Yue et al. schlagen die Verwendung alternativer Integrationsregeln vor [208]. Hierbei werden die Stützstellen der Integration von den üblichen Werten, die für die Gauß Quadratur verwendet werden, verschoben. Dieser Ansatz zeigt für zweidimensionale Probleme gute Ergebnisse. Decouvreur untersucht den Einfluss der Dispersion im Rahmen der Validierung von FE Modellen und stellt fest, dass zufriedenstellende Ergebnisse nur für sehr feine Diskretisierungen zu erwarten sind [57]. Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen ist die Verwendung netzfreier Verfahren [120, 38, 152].

### 4.1.4 Gleichungslöser

Die Effizienz von iterativen Gleichungslösern wie BiCG-Stab [194], TFQMR [75] oder GMRES [157] hängt stark von der Vorkonditionierung des Gleichungssystems ab. Die Verwendung der unmodifizierten unvollständigen LU-Zerlegung (ILU) führt nicht auf zufriedenstellende Konvergenzraten. Daher wurde z.B. von Monga [140] oder Gander [76] eine modifizierte Variante dieses Verfahren vorgeschlagen, dass speziell an die Helmholtzgleichung angepasst ist. Kechroud [111] vergleicht verschiedene modifizierte ILU Verfahren und wendet diese auf eine Galerkin FEM Formulierung an. Eine weitere Möglichkeit der Optimierung der Gleichungslösung besteht in der Verwendung von Mehrgitterlösern, wie sie von Elman [67] und Bartsch [21] vorgeschlagen werden.

Gebietszerlegungsverfahren eignen sich sowohl für die parallele Simulation großer Probleme als auch die Vorkonditionierung des Gleichungssystems. Für Probleme, die auf der Helmholtzgleichung basieren, wurde die Gruppe der FETI-H Algorithmen entwickelt [188]. Nachteilig an diesem Verfahren ist die Tatsache, dass selbst für Probleme ohne jegliche Dämpfung Terme mit komplexen Zahlen eingeführt werden, so dass sich der Speicherbedarf für das Gleichungssystem verdoppelt. Dieser Nachteil wird jedoch von der FETI-DPH Formulierung nach Farhat behoben [71]. Bei diesen Verfahren wird selbst für Anregungsfrequenzen, die in der Nähe von Resonanzfrequenzen liegen, das Gesamtgleichungssystem regularisiert, so dass eine Faktorisierung der Matrix möglich wird. Tezaur stellt ein modifiziertes FETI-H Verfahren für Helmholtzprobleme vor, dass auf Lagrangeschen Multiplikatoren beruht [181]. Der Präkonditionierer faktorisiert nur den lokalen Teil der Systemmatrix, wodurch die parallele Effizienz signifikant gesteigert wird. Des Weiteren ermöglicht dieser Ansatz die Berücksichtigung mehrerer rechter Seiten im Gleichungssystem. Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung der Kondition des Gleichungssystems besteht in der Verwendung von speziellen Ansatzfunktionen [151].



## 4.2 FEM für die Struktur

### 4.2.1 FE Formulierung für plattenartige Bauteile

Bei der Herleitung von Weggrößenelementen zur Beschreibung von Biegeschwingungen sind einige Besonderheiten zu berücksichtigen [22, 96, 209], auf die bei den folgenden Ausführungen näher eingegangen wird.

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen und partielle Integration führt für die Gleichungen (3.44)-(3.48) auf

$$\begin{aligned}
 \check{u}_3 : & \iint \left\{ \check{u}_{3,1} [G_{13} h k_{S13} (u_{3,1} + \varphi_1)] + \check{u}_{3,2} [G_{23} h k_{S23} (u_{3,2} + \varphi_2)] \right\} dx_1 dx_2 \\
 & - \iint \check{u}_3 p_3 dx_1 dx_2 - \iint \check{u}_3 [\omega^2 \rho h u_3] dx_1 dx_2 = 0 \\
 \check{\varphi}_1 : & \iint \left\{ \check{\varphi}_{1,1} [B_1 (\varphi_{1,1} + \nu_{21} \varphi_{2,2})] + \check{\varphi}_{1,2} [G_{12} I (\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})] + \check{\varphi}_1 [G_{13} h k_{S13} (u_{3,1} + \varphi_1)] \right\} dx_1 dx_2 \\
 & - \iint \check{\varphi}_1 [\omega^2 \rho I \varphi_1] dx_1 dx_2 = 0 \\
 \check{\varphi}_2 : & \iint \left\{ \check{\varphi}_{2,2} [B_2 (\varphi_{2,2} + \nu_{12} \varphi_{1,1})] + \check{\varphi}_{2,1} [G_{12} I (\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})] + \check{\varphi}_2 [G_{23} h k_{S23} (u_{3,2} + \varphi_2)] \right\} dx_1 dx_2 \\
 & - \iint \check{\varphi}_2 [\omega^2 \rho I \varphi_2] dx_1 dx_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

wobei mit  $\check{\cdot}$  die virtuellen Verrückungen gekennzeichnet sind, die am Rand der Platte bzw. Scheibe verschwinden.

Sowohl die wirklichen als auch die virtuellen Verformungen werden über den gleichen Satz von Ansatzfunktionen  $N_k(\xi, \eta)$  für jeden Knoten  $k$  eines Elements

$$\mathbf{u}_i(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) u_{ik}, \quad \boldsymbol{\varphi}_i(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \varphi_{ik} \tag{4.12}$$

$$\check{\mathbf{u}}_i(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \check{u}_{ik}, \quad \check{\boldsymbol{\varphi}}_i(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \check{\varphi}_{ik} \tag{4.13}$$

angenähert. Darin ist  $n$  die Anzahl der Knoten eines Elements und die mit  $k$  gekennzeichneten Verformungen sind die Werte dieser Verformungen an den Elementknoten.

Das in Gleichung (4.11) angegebene System kann wie folgt

$$(\mathbf{K}^P - \omega^2 \mathbf{M}^P) \mathbf{u}^P = \mathbf{f}^S \tag{4.14}$$

in Matrixschreibweise dargestellt werden. Der Vektor der gesuchten Knotenverschiebungen ist  $\mathbf{u}^P = [\mathbf{u}_3 \ \boldsymbol{\varphi}_1 \ \boldsymbol{\varphi}_2]^T$ . Die Elementsteifigkeitsmatrix der Mindlinplatte aus Gleichung 4.14 kann in zwei Anteile aufgespalten werden. Der Anteil  $\mathbf{K}^B$  beschreibt den Biegeanteil und  $\mathbf{K}^S$  den Schubanteil

$$\mathbf{K}^P = \mathbf{K}^B + \mathbf{K}^S = \int_A \mathbf{H}^{B^T} \mathbf{E}^B \mathbf{H}^B dA + \int_A \mathbf{H}^{S^T} \mathbf{E}^S \mathbf{H}^S dA. \tag{4.15}$$

Die Matrizen  $\mathbf{H}^B$  und  $\mathbf{H}^S$  werden aus den Ansatzfunktionen sowie deren Ableitungen gebildet

$$\mathbf{H}^B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{N}_{,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{,2} & \mathbf{N}_{,1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,1} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{,2} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

die Elastizitätsmatrizen für den Biegeanteil  $\mathbf{E}^B$  und den Scheranteil  $\mathbf{E}^S$  lauten

$$\mathbf{E}^B = \begin{bmatrix} B_1 & B_x \nu_{12} & 0 \\ B_2 \nu_{12} & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} I \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}^S = \begin{bmatrix} G_{13} h k_{S13} & 0 \\ 0 & G_{23} h k_{S23} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Die Massenmatrix der Mindlinplatte aus Gleichung (4.14) lautet

$$\mathbf{M}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho_S h & 0 & 0 \\ 0 & \rho_S h & 0 \\ 0 & 0 & \rho_S I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

und der Lastvektor für eine beliebig verteilte Flächenlast berechnet sich zu

$$\mathbf{f} = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{p}_3 \, dA. \quad (4.19)$$

Wie bei den Fluidelementen sind auch bei den Plattenelementen Konvergenzkriterien zu erfüllen [22]. Ebenso wie bei den Fluidelementen reichen  $C^0$ -stetige Ansätze zur Erfüllung dieser Kriterien aus.

Bereits in den sechziger Jahren wurde erkannt, dass finite Elemente, deren Herleitung auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen beruht, bei bestimmten Grenzfällen ungenaue oder sogar völlig unbrauchbare Ergebnisse liefern. Dieses Phänomen lässt sich in der Tatsache beobachten, dass Verschiebungen stark unterschätzt werden. Im englischen Sprachgebrauch hat sich für dieses Phänomen der Begriff *Locking* etabliert [97].

#### 4.2.2 Künstliche Versteifungseffekte (*Locking*)

Die anschaulichste Methode zum Verständnis der künstlichen Versteifungseffekte ist die, das Auftreten parasitärer Spannungen zum Indikator von Locking zu machen. Als parasitäre Spannungen werden solche Spannungen bezeichnet, die in der exakten Lösung des betrachteten Problems nicht enthalten sind. Beispiele dafür sind Querkkräfte bei reiner Biegung eines Plattenelements (Querschublocking) oder Membranspannungen bei dehnungslosen Verformungen von Schalen (Membranlocking). Die daraus resultierenden Energieanteile führen zu einer zusätzlichen und somit künstlichen Steifigkeit. Betrachtet man das Verhältnis von dieser zusätzlichen Steifigkeit zur Gesamtsteifigkeit, so kann dieses Verhältnis in Abhängigkeit von einem kritischen Parameter gegen Eins gehen. Für derartige Fälle unterscheiden sich die exakte Lösung und die berechnete Lösung sehr stark. Beispiele für diesen kritischen Parameter sind beim Querschublocking von Platten und Schalen deren Dicke oder beim volumetrischen Locking die Querkontraktionszahl  $\nu$ , deren Wert gegen 0,5 strebt [22].

Das Auftreten parasitärer Spannungen kann für die meisten Lockingeffekte mit der fehlenden Balance der Ansatzfunktionen begründet werden. Durch geometrische Zwänge entstehen hierbei Spannungen, die dadurch entstehen, dass die Verläufe bestimmter Verzerrungsanteile einen geringeren Polynomgrad aufweisen als die dazu energetisch konjugierten Spannungen. Betrachtet man beispielsweise einen schubweichen Balken, bei dem sowohl die Verschiebungen als auch die Rotationen mit dem gleichen Polynom interpoliert werden, so ist zu beobachten, dass die Bernoullibedingung nicht erfüllt werden kann, weil die Ordnung der Rotationen eine höhere Ordnung haben als die Ableitung der Biegelinie. Dadurch kann der Schubwinkel nur für den trivialen Fall

der Starrkörperverschiebung Null werden [32]. Diese rein mechanische Anschauungsweise unterliegt der Schwäche, dass die Identifikation parasitärer Spannungen einer gewissen Willkür des Betrachters unterliegt. Allerdings ist dieses Vorgehen für das Verständnis der mechanischen Ursachen von Locking unerlässlich. In der Vergangenheit war diese Sichtweise Voraussetzung für wesentliche Entwicklungen im Bereich der Elementtechnologie. So beruhen die Methode der inkompatiblen Verschiebungen von Taylor et al. [180], die *Assumed Natural Strain* (ANS) Methode von Hughes und Tezduyar [98] sowie die *Mixed Interpolation of Transversal Components* (MITC) von Bathe und Dvorkin [23] auf diesen Überlegungen.

Das Querschublocking könnte bei den Problemen, die in Abschnitt 7 untersucht werden, auftreten und ist somit zur Sicherstellung der Güte der Berechnungsergebnisse aus der Elementformulierung zu eliminieren. Der kritische Parameter dieses Phänomens ist die Dicke der betrachteten Platte. Untersucht man die Eigenfrequenzen von Platten und verringert deren Schlankheit, so weichen die berechneten Eigenwerte für schlanker werdende Platten zunehmend von der analytischen Lösung ab [209].

Um den Anwendungsbereich des hier vorgestellten Plattenelements auf schlankere Bauteile zu erweitern, ist ein Verfahren zu verwenden, welches das Querschublocking unterbindet und somit die Verwendung des Mindlinplattenelements auch für sehr schlanke Platten ermöglicht. Ein mögliches Verfahren ist die *Discrete Shear Gap* (DSG) Methode [31, 32], die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

### 4.2.3 DSG Stabilisierung

Der Vorteil der DSG Methode gegenüber Verfahren wie ANS oder MITC liegt in der Tatsache, dass sich dieses Verfahren auf beliebige Elementtopologien und Ansatzordnungen anwenden lässt. Das Verfahren basiert auf einer reinen Verschiebungsformulierung und verwendet lediglich die üblichen Freiwerte wie Verschiebungen und Verdrehungen an den Knoten. Es werden keine weiteren internen Parameter o.ä. eingeführt. Ein weiterer Vorteil dieser Formulierung ist die Tatsache, dass die benötigte Integrationsordnung um eine Ordnung reduziert wird, wodurch die Berechnungszeit für dieses Element gegenüber den Standardelementen reduziert wird.

Die Grundidee des Verfahrens besteht darin, die Bernoullibedingung des Ebenbleibens des Querschnitts nicht exakt im gesamten Element sondern nur im Mittel über das Element zu erfüllen. Zu

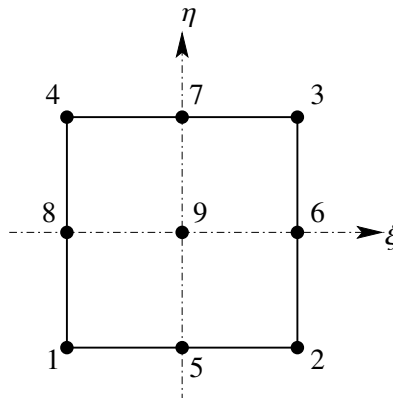


Abbildung 4.3: Referenzelement für die Berechnung der *shear gaps* für Elemente mit vier bzw. neun Knoten

diesem Zweck wird eine sogenannte *shear gap*  $\Delta\gamma_\gamma$  eingeführt, die den Unterschied zwischen der Verschiebung infolge reiner Biegung und der aktuellen Verschiebung zwischen zwei Punkten in einem finiten Element beschreibt. Diese *shear gap* wird für beide lokalen Koordinatenrichtungen des finiten Elements zu

$$\Delta\gamma_{\gamma\xi}^i = \int_{x_1}^{x_i} \gamma_\xi(\xi, \eta_i) d\xi \quad (4.20)$$

$$\Delta\gamma_{\gamma\eta}^i = \int_{x_1}^{x_i} \gamma_\eta(\xi_i, \eta) d\eta \quad (4.21)$$

berechnet, wobei von einem Referenzknoten, hier der Knoten  $x_1$ , zu einem weiteren Knoten  $x_i$  integriert wird. Darin sind  $\gamma_\xi$  bzw.  $\gamma_\eta$  zu

$$\begin{bmatrix} \gamma_\xi(\xi, \eta) \\ \gamma_\eta(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \frac{\partial N^k}{\partial \xi} u_3^k \\ \sum_{i=1}^k \frac{\partial N^k}{\partial \eta} u_3^k \end{bmatrix} + \mathbf{J} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k N^k \varphi_1^k \\ \sum_{i=1}^k N^k \varphi_2^k \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

gegeben. Die modifizierten Schubverzerrungen ergeben sich nun durch die Berechnung der partiellen Ableitungen der *shear gaps*

$$\begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \frac{\partial N^k}{\partial \xi} \Delta\gamma_{\gamma\xi}^i \\ \sum_{i=1}^k \frac{\partial N^k}{\partial \eta} \Delta\gamma_{\gamma\eta}^i \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Nachdem diese modifizierten Schubverzerrungen in das globale  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatensystem transformiert worden sind

$$\begin{bmatrix} \gamma_{x_1} \\ \gamma_{x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

kann nun ein neuer Operator  $\mathbf{H}^S$  (vgl. Gleichung (4.16)) aufgestellt werden

$$\mathbf{H}^S = \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_{x_1}}{\partial u_3} & \frac{\partial \gamma_{x_1}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial \gamma_{x_1}}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial \gamma_{x_2}}{\partial u_3} & \frac{\partial \gamma_{x_2}}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial \gamma_{x_2}}{\partial \varphi_2} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

mit dem der Schubanteil  $\mathbf{K}^S$  der Elementsteifigkeitsmatrix nach Gleichung (4.15) berechnet werden kann. Für ein Element mit vier Knoten und bilinearen Ansätzen liefert das DSG Element die gleichen Ergebnisse wie das MITC4 Element von Bathe und Dvorkin [31].

#### 4.2.4 FE Formulierung für scheibenartige Tragwerke

Die Herleitung der FE Formulierung für die in-planen Schwingungen erfolgt analog zur Herleitung für plattenartige Bauteile. Nach Anwendung des PvV auf die Gleichungen (3.51) und (3.52) sowie

Durchführung der partiellen Integration erhält man

$$\begin{aligned} \check{u}_1 : & \iint \left\{ \check{u}_{1,1} \left[ \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} (u_{1,1} + \nu_{21}u_{2,2}) \right] + \check{u}_{1,2} [G_{12}(u_{1,2} + u_{2,1})] \right\} dx_1 dx_2 \\ & - \iint \check{u}_1 p_1 dx_1 dx_2 - \iint \check{u}_1 [\omega^2 \rho h u_1] dx_1 dx_2 = 0 \quad \text{und} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \check{u}_2 : & \iint \left\{ \check{u}_{2,2} \left[ \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} (u_{2,2} + \nu_{12}u_{1,1}) \right] + \check{u}_{2,1} [G_{12}(u_{1,2} + u_{2,1})] \right\} dx_1 dx_2 \\ & - \iint \check{u}_2 p_2 dx_1 dx_2 - \iint \check{u}_2 [\omega^2 \rho h u_2] dx_1 dx_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Dieses System lautet in Matrizenschreibweise

$$[\mathbf{K}^M - \omega^2 \mathbf{M}^M] \mathbf{u}^M = \mathbf{f}^M, \quad (4.28)$$

wobei  $\mathbf{u}^M$  die Knotenverschiebungen in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung enthält

$$\mathbf{u}^M = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^M$  aus Gleichung (4.28) berechnet sich aus

$$\mathbf{K}^M = \iint \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{,2} \\ \mathbf{N}_{,2} & \mathbf{N}_{,1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_1 & E_1 \nu_{21} & 0 \\ E_2 \nu_{12} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{,2} \\ \mathbf{N}_{,2} & \mathbf{N}_{,1} \end{bmatrix} dx_1 dx_2 \quad (4.30)$$

und die Massenmatrix  $\mathbf{M}^M$  ergibt sich zu

$$\mathbf{M}^M = \iint \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho h & 0 \\ 0 & \rho h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} dx_1 dx_2. \quad (4.31)$$

Der Lastvektor  $\mathbf{f}^M$  für eine beliebig verteilte Flächenlast folgt aus

$$\mathbf{f} = \iint \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} dx_1 dx_2. \quad (4.32)$$

Analog zu den Elementen für plattenartige Bauteile müssen auch die Elemente zur Beschreibung scheibenartiger Bauteile einigen Konvergenzkriterien genügen. Zur Erfüllung dieser Kriterien reichen  $C^0$ -stetige Ansatzfunktionen aus. Um die Elemente wie im folgenden Abschnitt beschrieben mit Plattenelementen zu ebenen Schalenelementen überlagern zu können, werden wiederum isoparametrische Elemente mit vier und neun Knoten gewählt. Das Vier-Knoten-Element ist ein Standardelement mit bilinearen Ansätzen. Obwohl ähnlich wie bei den Plattenelementen auch bei Scheibenelementen künstliche Versteifungseffekte auftreten können [10], wurden keine spezielle Elementformulierung verwendet, da im Rahmen der hier durchgeführten Berechnungen keinerlei derartige Probleme auftraten. Für das biquadratische Element mit neun Knoten wurde die ANS Stabilisierung nach Wong und Belytschko implementiert [25, 205]. Analog zum DSG Plattenelement mit neun Knoten werden nur  $2 \times 2$  Gaußpunkte für die numerische Integration benötigt.

#### 4.2.5 Ebenes Schalenelement

An den Ecken eines Raumes werden in-plane Wellen in BiegeWellen umgewandelt (vgl. Abschnitt 3.1). Um dies im Berechnungsmodell zu erfassen, werden die vorgestellten Formulierungen für die Scheibe und die Platte zu einem ebenen Schalenelement überlagert. Dieses Verfahren wird für die Modellierung gefalteter Plattenstrukturen oder auch leicht gekrümmten Schalen verwendet [22, 209]. Für die Berechnung des Gleichungssystems werden die Gleichungen (4.14) und (4.28) zu einer Gleichung zusammengefasst

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}^P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^M \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^M \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}^P \\ \mathbf{u}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^P \\ \mathbf{f}^M \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

In diesem Gleichungssystem, das im lokalen Elementkoordinatensystem aufgestellt wird, bezeichnet  $P$  den Plattenanteil und  $M$  den Scheibenanteil. Diese beiden Anteile sind in Gleichung (4.33) vollständig entkoppelt. Zum Aufstellen des Gesamtgleichungssystems sind die lokalen Elementmatrizen in das globale Koordinatensystem zu transformieren. Dies geschieht für die Elementsteifigkeitsmatrix durch

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_\ell \mathbf{T}, \quad (4.34)$$

wobei der Index  $g$  das globale und der Index  $\ell$  das lokale Koordinatensystem kennzeichnet. Die Matrix  $\mathbf{T}$  berechnet sich aus den Richtungskosinus zwischen den Achsen des lokalen und des globalen Koordinatensystems [209]. Betrachtet man jedoch Gleichung (4.33) genau, so stellt man fest, dass das ebene Schalenelement nur fünf Freiheitsgrade je Knoten besitzt. Die Rotation  $\varphi_3$  um die  $x_3$ -Achse ist bisher in dieser Formulierung nicht enthalten. Da jedoch die allgemeine Transformation im dreidimensionalen Raum sechs Freiheitsgrade je Knoten berücksichtigt, kann die Transformation nach Gleichung (4.34) nicht durchgeführt werden. Zur Regularisierung der Transformation gibt es verschiedene Möglichkeiten. So kann beispielsweise eine Elementformulierung für die in-planen Schwingungen eingeführt werden, die den Freiheitsgrad  $\varphi_3$  enthält [102]. Ein einfacherer Ansatz besteht im Einführen einer künstlichen Steifigkeit  $\mathbf{K}_{\varphi_3}$ , deren Wert willkürlich gewählt werden kann. So schlägt Bathe vor, einen Wert von  $1,0 \times 10^{-5}$  des kleinsten Diagonalwertes der Steifigkeitsmatrix nach Gleichung (4.33) zu verwenden [22]. Führt man diese Steifigkeit ein, so lautet das regularisierte Gleichungssystem für ein Element

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}^P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\varphi_3} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\varphi_3}^P \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}^P \\ \mathbf{u}^M \\ \boldsymbol{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^P \\ \mathbf{f}^M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

wobei  $\mathbf{M}_{\varphi_3}^P$  gleich dem Hauptdiagonalwert aus der Massenmatrix des Plattenelements ist, der dem Freiheitsgrad  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  zugeordnet ist. Wie sich in Abschnitt 6.3 zeigt, ist diese einfache Formulierung für den vorliegenden Anwendungsfall ausreichend. Daher wird auf die Verwendung einer Scheibenformulierung, die den Freiheitsgrad  $\varphi_3$  explizit enthält, verzichtet.

Um das Auftreten von Unstetigkeiten an den Elementrändern zu verhindern, ist bei der Kombination von Platten- und Scheibenelementen darauf zu achten, dass nur Elemente mit der gleichen Anzahl von Knoten miteinander kombiniert werden.

### 4.3 Kopplung von akustischem Fluid und elastischer Struktur

Das vollständig gekoppelte Gleichungssystem ergibt sich aus der Druckformulierung für das Fluid  $F$  (vgl. Gleichung (4.7)) sowie der Verschiebungsformulierung für die Struktur  $S$  (vgl. Gleichung

(4.14))

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^F - \omega^2 \mathbf{M}^F & -\rho \omega^2 \mathbf{C}^T \\ -\mathbf{C} & \mathbf{K}^S - \omega^2 \mathbf{M}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Die Kopplungsmatrix  $\mathbf{C}$  ergibt sich durch Auswertung des Randintegrals in Gleichung (4.2). Sie berechnet sich aus dem Integral des Produkts der Ansatzfunktionen der Struktur  $\mathbf{N}^S$  und des Fluids  $\mathbf{N}^F$  über den Kopplungsrand  $\Gamma_i$

$$\mathbf{C} = \int_{\Gamma_i} [\mathbf{N}^S]^T \mathbf{N}^F d\Gamma. \quad (4.37)$$

Das Gleichungssystem (4.36) kann symmetrisiert werden, indem der Fluidanteil durch  $\rho \omega^2$  dividiert wird

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\rho \omega^2} \mathbf{K}^F - \frac{1}{\rho} \mathbf{M}^F & -\mathbf{C}^T \\ -\mathbf{C} & \mathbf{K}^S - \omega^2 \mathbf{M}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Wie bereits in Abschnitt 3.5 beschrieben wurde, leisten nur die Verschiebungen und der Fluiddruck wechselseitig Arbeit aufeinander. Daher ist es möglich, die im Gesamtsystem nicht benötigten Rotationsfreiheitsgrade  $\varphi_i$  bereits auf Elementebene aus der dynamischen Steifigkeitsmatrix zu kondensieren. Dies führt zur einer signifikanten Reduzierung des Speicherbedarfs für die Gesamtsystemmatrix [22].

## 4.4 Poroelastische Strukturen

In diesem Abschnitt werden die Elementmatrizen für das dreidimensionale poroelastische Kontinuum, dessen Grundgleichungen in Abschnitt 3.7 vorgestellt wurden, hergeleitet. In der Folge wird nur auf die wichtigsten Beziehungen eingegangen. Details zur Herleitung finden sich bei Atalla et al. [11]. Die schwache Form der Gleichungen (3.86) bis (3.88) lautet

$$\delta u_i : \int_V \bar{\sigma}_{ij}^S \delta \varepsilon_{ij} - \omega^2 \tilde{\rho} u_i \delta u_i dV - \int_V \tilde{\gamma} \delta u_i p_{,i} dV = \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \alpha \delta u_n p d\Gamma \quad (4.39)$$

bzw.

$$\delta p : \int_V \frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \delta p_{,i} p_{,i} - \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p \delta p dV - \int_V \tilde{\gamma} \delta p_{,i} u_i dV = \int_{\Gamma} \phi ((U_n - u_n) + \alpha u_n) \delta p d\Gamma. \quad (4.40)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{uu}$  bzw. die Massenmatrix  $\mathbf{M}_{uu}$  für das Korngerüst sind zu

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V (\mathbf{D}\mathbf{N})^T (\mathbf{D}\mathbf{N}) dV \text{ und} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{M}_{uu} = \int_V \tilde{\rho} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (4.42)$$

gegeben. Darin berechnet sich die Dichte  $\tilde{\rho}$  zu

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{11} - \frac{\tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}}, \quad (4.43)$$

wobei die übrigen Dichten in den Gleichungen (3.75)-(3.77) definiert sind. Für das Porenfluid ergeben sich für die Massenmatrix  $\mathbf{M}_{pp}$  und die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{pp}$

$$\mathbf{K}_{pp} = \int_V \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} (\nabla \mathbf{N})^T (\nabla \mathbf{N}) \, dV \text{ bzw.} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{M}_{pp} = \int_V \frac{\phi^2}{\tilde{R}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dV \quad (4.45)$$

mit

$$\tilde{R} = \phi \tilde{K}_f. \quad (4.46)$$

$\tilde{K}_f$  ist der frequenzabhängige komplexe Kompressionsmodul des Porenfluids, dessen Bestimmung in Anhang A beschrieben ist. Die Kopplungsmatrix  $\mathbf{K}_{up}$ , die die Interaktion zwischen Korngerüst und Porenfluid beschreibt, ist zu

$$\mathbf{K}_{up} = \int_V \tilde{\gamma} (\nabla \mathbf{N})^T \mathbf{N} \, dV \quad (4.47)$$

gegeben. Somit ergibt sich folgende dynamische Elementsteifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & -\mathbf{K}_{up} \\ -\omega^2 \mathbf{K}_{up}^T & \mathbf{K}_{pp} - \omega^2 \mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

für ein dreidimensionales poroelastisches Kontinuumsselement.

## 4.5 Kopplung poroelastischer Strukturen mit verschiedenen Medien

In diesem Abschnitt sollen die Kopplungsbedingungen zwischen der schwachen Form der gemischten u-p Formulierung für das poroelastische Kontinuum nach Biot und dem akustischen Fluid sowie der elastischen Struktur beschrieben werden.

Diese Bedingungen sind für die Beschreibung von mehrschichtigen Strukturen, die in einer Vielzahl von technischen Anwendungen eine Rolle spielen wichtig, da die eingebrachten poroelastischen Materialien die Dämpfung des Systems signifikant erhöhen. Derartige mehrschichtige Strukturen können aus verschiedenen akustischen, poroelastischen und linear elastischen Schichten bestehen. Ein Beispiel für einen derartigen Aufbau wäre eine zweischalige Gipskartonwand, in deren Hohlraum Mineralwolle eingebracht wird.

Im Folgenden sollen nur die wichtigsten Gleichungen vorgestellt werden. Eine ausführliche Übersicht findet sich z.B. bei [56].

### 4.5.1 Kopplung mit einer elastischen Struktur

Die elastische Struktur wird über seine Verschiebungen  $\mathbf{u}^e$  beschrieben. Durch Kombination der schwachen Form des poroelastischen Mediums mit der schwachen Form des linear elastischen Mediums können die Randintegrale der Gleichungen (4.39) und (4.40) zu

$$I_1 = - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p \delta \mathbf{u}_n \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}^e \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (4.49)$$

$$I_2 = - \int_{\Gamma} \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \mathbf{u}_n \delta p \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi (\mathbf{U}_n - \mathbf{u}_n) \delta p \, d\Gamma \quad (4.50)$$



umformuliert werden. In Gleichung (4.49) ist  $\boldsymbol{\sigma}^e$  der Spannungstensor des elastischen Mediums. Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  wurde in Gleichung (3.83) definiert. Das positive Vorzeichen des dritten Terms aus Gleichung (4.49) folgt aus der positiven Richtung des Normalenvektors  $\mathbf{n}$ , der in das elastische Medium hineinzeigt. Die Kopplungsbedingungen auf dem Rand  $\Gamma$  finden sich bei Panneton et al. [147] und lauten:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^e\mathbf{n}, \quad (4.51)$$

$$\mathbf{U}_n - \mathbf{u}_n = 0 \quad \text{sowie} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^e. \quad (4.53)$$

Die erste Gleichung stellt die Kontinuität der Spannungen an der Schnittstelle sicher. Durch Einhaltung der zweiten Bedingung wird verhindert, dass ein Massenfluss über den Rand  $\Gamma$  stattfindet. Gleichung (4.53) stellt die Kontinuität der Verschiebungen zwischen den beiden Teilgebieten sicher. Durch Substitution der ersten beiden Bedingungen in die Gleichungen (4.49) und (4.50) ergeben sich die Integrale

$$I_1 = - \int_{\Gamma} \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p \delta \mathbf{u}_n \, d\Gamma \quad (4.54)$$

$$I_2 = - \int_{\Gamma} \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \mathbf{u}_n \delta p \, d\Gamma \quad (4.55)$$

An diesen beiden Gleichungen lässt sich erkennen, dass das elastische Medium über symmetrische Kopplungsterme mit dem poroelastischen Medium verbunden ist. Zusätzlich zu diesen beiden Gleichungen ist die kinematische Beziehung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^e$  explizit auf dem Rand  $\Gamma$  sicherzustellen. Für klassische poroelastische Materialien, für die

$$\phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \approx 1 \quad (4.56)$$

gilt, reduzieren sich die Gleichungen (4.54) und (4.55) auf das klassische vollständig gekoppelte Fluid-Struktur-Interaktionsproblem, das bereits in Abschnitt 4.3 diskretisiert wurde.

#### 4.5.2 Kopplung mit einem akustischen Fluid

Das akustische Fluid wird, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, über den Schalldruck  $p^a$  beschrieben. Die Randintegrale aus den Gleichungen (4.39) und (4.40) lassen sich durch Kombination der schwachen Formen für das poroelastische Kontinuum und das akustische Fluid zu

$$I_1 = - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{n}) \delta \mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) p \delta \mathbf{u}_n \, d\Gamma \quad \text{und} \quad (4.57)$$

$$I_2 = - \int_{\Gamma} \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \mathbf{u}_n \delta p \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi (\mathbf{U}_n - \mathbf{u}_n) \delta p \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial \mathbf{n}} \delta p^a \, d\Gamma \quad (4.58)$$

formulieren. Das positive Vorzeichen des letzten Terms aus Gleichung (4.58) ergibt sich aus der positiven Richtung des Normalenvektors  $\mathbf{n}$ , das in diesem Fall in das akustische Medium hinein zeigt. Die Kopplungsbedingungen zwischen den beiden Teilgebieten finden sich z.B. bei Panneton

et al. [147]:

$$\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n} = -p^a \mathbf{n}, \quad (4.59)$$

$$\frac{1}{\rho_F \omega^2} \frac{\partial p^a}{\partial \mathbf{n}} = (1 - \phi) \mathbf{u}_n + \phi \mathbf{U}_n = \mathbf{u}_n + \phi (\mathbf{U}_n - \mathbf{u}_n), \quad (4.60)$$

$$p = p^a. \quad (4.61)$$

Der erste Term erzwingt das Gleichgewicht zwischen beiden Teilgebieten an der Schnittstelle  $\Gamma$  und der zweite Term sichert die Kontinuität des Massenflusses über den Rand  $\Gamma$ . Durch den dritten Term wird die Kontinuität des Druck gewährleistet. Durch Substitution der Gleichungen (4.59)-(4.61) in die Gleichungen (4.57) und (4.58) lassen sich die Integrale über den Rand  $\Gamma$  zu

$$I_1 = \int_{\Gamma} \left( 1 - \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \right) p^a \delta \mathbf{u}_n \, d\Gamma \quad \text{und} \quad (4.62)$$

$$I_2 = \int_{\Gamma} \left( 1 - \phi \left( 1 + \frac{\tilde{Q}}{\tilde{R}} \right) \right) \mathbf{u}_n \delta p^a \, d\Gamma \quad (4.63)$$

umformulieren. Diese Terme führen ebenfalls auf eine symmetrische Formulierung für die Kopplung von akustischem Fluid und poroelastischem Kontinuum. Ebenso wie für die Kopplung von elastischer Struktur und poroelastischem Kontinuum gilt auch hier für die üblichen poroelastischen Materialien Bedingung (4.56). Dadurch ergibt sich sowohl  $I_1 = 0$  als auch  $I_2 = 0$ . Die Kopplungsterme werden somit aus der Formulierung eliminiert und lediglich die kinematische Bedingung  $p = p^a$  ist für den Rand  $\Gamma$  sicherzustellen.

## 4.6 Behandlung infiniter Gebiete

Die folgenden Abschnitte beschreiben die Formulierungen, die zur Berücksichtigung unendlich ausgedehnter Fluidgebiete an die FE Formulierung gekoppelt werden. Zum Einen wird die Randelementmethode (REM) verwendet, die implizit die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung erfüllt und somit sehr gut für die Beschreibung von Wellenausbreitungsvorgängen in infiniten Gebieten geeignet ist. Das zweite Verfahren, das für die Modellierung infiniter Gebiete verwendet wird, ist die *Scaled Boundary Finite Element Method*, die zahlreiche Vorteile der FEM und der REM vereint und deren Anwendung daher attraktiv ist. Die Verifikation der Kopplung dieser beiden Verfahren mit der zuvor vorgestellten FE Formulierung erfolgt in Abschnitt 6.5.

### 4.6.1 Randelementmethode

Grundlage der Randelementmethode ist die integrale Beschreibung des akustischen Randwertproblems, das in Abschnitt 3.3 formuliert wurde. Es gibt zwei Möglichkeiten, die Randelementmethode abzuleiten: die direkte und die indirekte Methode. Im folgenden Abschnitt wird nur auf die direkte Formulierung eingegangen. Details zur indirekten Formulierung finden sich bei Tröndle [190] oder Langer [122].

Im Rahmen beider Formulierungen wird davon ausgegangen, dass das betrachtete Gebiet  $\Omega$  im physikalischen Sinne homogen ist und eine Fundamentallösung der Differentialgleichung vorliegt. Die Fundamentallösung beschreibt die Antwort im Vollraum auf eine an der Stelle  $\boldsymbol{\xi}$  einwirkende

Punktquelle mit der Intensität 1. Somit muss die Fundamentallösung die inhomogene Differentialgleichung

$$\Delta p^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + k^2 p^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (4.64)$$

erfüllen.  $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$  wird als Dirac-Funktion bezeichnet. Betrachtet man dreidimensionale Probleme, so handelt es sich hierbei im physikalischen Sinne um einen Kugelstrahler nullter Ordnung. Für  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$  stellt die Dirac-Funktion einen Filter für beliebige Funktionen  $f(\mathbf{x})$  dar

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \, d\Omega = f(\boldsymbol{\xi}). \quad (4.65)$$

Die Dirac-Funktion filtert somit den Funktionswert des Integranden am Ort  $\boldsymbol{\xi}$  heraus. Für Abstrahlungsprobleme, die die Sommerfeldsche Abstrahlungsbedingung (3.17) erfüllen, ergibt sich die Fundamentallösung  $p^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  als Lösung der Gleichung (4.64) zu

$$p^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \quad (4.66)$$

$$\text{mit } r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|. \quad (4.67)$$

Aufgrund der oben beschriebenen Eigenschaft der Dirac-Funktion erfüllt diese Fundamentallösung in allen Punkten  $\mathbf{x}$  außer dem Punkt  $\boldsymbol{\xi}$  die homogene Differentialgleichung (3.14). Für den Fall  $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = 0$  weist die Fundamentallösung eine Singularität auf. Durch Differentiation von Gleichung (4.66) ergibt sich die Fundamentallösung für den Schallfluss zu

$$q^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} (1 - ikr) e^{ikr}. \quad (4.68)$$

Sowohl die Fundamentallösung  $p^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  als auch  $q^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  sind implizit von der Wellenzahl  $k$  abhängig.

Analog zur FE-Formulierung für das akustische Fluid (vgl. Gleichung (4.1)) wird die Helmholtzgleichung (3.14) wiederum mit einer Wichtungsfunktion multipliziert und über das betrachtete Gebiet integriert. Im Gegensatz zur in Abschnitt 4.1 vorgestellte FE-Formulierung wird nun jedoch die Fundamentallösung als Wichtungsfunktion verwendet. Somit lautet die schwache Form

$$\int_{\Omega} p^* (\Delta p + k^2 p) \, d\Omega = 0. \quad (4.69)$$

Wendet man auf Gleichung (4.69) nun den Integralsatz nach Gauß-Green (Divergenztheorem) an, so wird aus dem Gebietsintegral aus Gleichung (4.69) ein Integral über den Rand  $\Gamma$  des betrachteten Gebiets und unter Berücksichtigung von Gleichung (4.65) ergibt sich

$$p(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} (q(\mathbf{x}) p^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \, d\Gamma + \int_{\Omega} a(\mathbf{x}) p^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \, d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \Omega. \quad (4.70)$$

Diese Gleichung stellt den Zusammenhang zwischen dem Schalldruck  $p(\boldsymbol{\xi})$  des beliebig wählbaren Quellpunktes und den Werten für den Schalldruck  $p(\mathbf{x})$  und den Schallfluss  $q(\mathbf{x})$  auf dem Rand des betrachteten Gebiets her. Wird nun der Quellpunkt  $\boldsymbol{\xi}$  auf den Rand verschoben, sind nur noch die Werte auf dem Rand  $\Gamma$  in Gleichung (4.70) enthalten. Somit ergibt sich die Randintegralgleichung, deren Lösung die unbekannten Randwerte, die nicht durch Randbedingungen festgelegt sind, liefert.

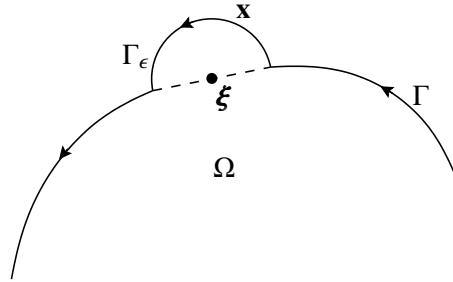


Abbildung 4.4: Integration in der Umgebung eines singulären Punktes

Da die Fundamentallösungen (4.66) und (4.68) im Quellpunkt  $\xi$  singulär sind, muss nach dem oben beschriebenen Grenzübergang  $\xi \rightarrow \mathbf{x}$  über eben diese Singularität integriert werden. Dazu wird um den Punkt  $\xi$  gedanklich eine halbkugelförmige  $\epsilon$ -Umgebung eingeführt (vgl. Abbildung 4.4), die vom Rand  $\Gamma_\epsilon$  umschlossen wird. Dadurch erfolgt die Integration anstatt über den Rand  $\Gamma$  des betrachteten Gebiets nun über einen Rand  $\Gamma^- = \Gamma \setminus \Gamma_\epsilon$  und die neu eingeführte  $\epsilon$ -Umgebung. Durch den Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  ergibt sich die Randintegralgleichung

$$c(\xi)p(\xi) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \xi)p(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} p^*(\mathbf{x}, \xi)q(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} a(\mathbf{x})p^*(\mathbf{x}, \xi) d\Omega. \quad (4.71)$$

Der Faktor  $c(\xi)$  des integralfreien Terms berechnet sich aus

$$c(\xi) = 1 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} q^*(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma_\epsilon. \quad (4.72)$$

Der zweite Faktor aus Gleichung (4.72) erfasst sowohl die Singularität am Ort  $\xi$  als auch die Geometrie des Randes. Für einen glatten Rand ergibt sich  $c(\xi) = 0,5$ .

Die direkte und die indirekte Randelementformulierung für den zweidimensionalen Fall wird in [87] ausführlich beschrieben.

Obige Randintegralgleichung lässt sich in der Regel nicht exakt lösen. Daher wird sie durch Diskretisierung des Randes  $\Gamma$  in eine Randelementgleichung überführt. Analog zur FEM werden die beiden Größen  $p$  und  $q$  durch Ansatzfunktionen approximiert. Mit Hilfe des Kollokationsverfahrens, d.h. durch die knotenweise Auswertung der Integralgleichung, oder das Galerkin-Verfahren können dann die unbekannten Knotenwerte ermittelt werden

$$\mathbf{G}\mathbf{q} - \mathbf{H}\mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (4.73)$$

Diese Verfahren werden in [190] ausführlich beschrieben. Durch Gleichung (4.73) kann der auf dem Neumannrand unbekannte Schalldruck  $p$  bzw. der auf dem Dirichletrand unbekannte Schallfluss  $q$  durch Umstellen der algebraischen Gleichungen berechnet werden.

Bei der Behandlung von reinen Neumannproblemen mit rein reellen Wellenzahlen  $k$  treten besondere Probleme auf, auf die hier kurz eingegangen werden soll. Für solche reellen Wellenzahlen finden sich in der Lösung der Randintegralgleichung fiktive Eigenmoden, die jedoch im Gegensatz zu den Eigenlösungen von Innenraumproblemen keine physikalische Bedeutung haben [207]. Dadurch ist die Eindeutigkeit der Lösung nicht sichergestellt, was sich mit Hilfe der Fredholmschen Theorie zeigen lässt [34, 171] und ausführlich in [190] ausgeführt wird.

Da diese fiktiven Eigenfrequenzen des Neumannschen Außenraumproblems keine physikalische Bedeutung haben, ist das numerische Lösungsverfahren derart zu modifizieren, dass auch für diesen Fall eine eindeutige Lösung berechnet wird. Häufig verwendete Verfahren sind in diesem

Zusammenhang die CHIEF Methode nach Schenk [161] und die Methode von Burton und Miller [35]. Bei der sog. CHIEF Methode (*Combined Helmholtz Integral Equations Formulation*) werden zur Regularisierung des Systems zusätzliche Diskretisierungspunkte im Innern des betrachteten Gebiets eingeführt. Die Stabilität des Verfahrens hängt stark von der Anzahl und der Lage dieser zusätzlich eingeführten Punkte ab. Beim Verfahren nach Burton und Miller wird eine Linearkombination aus der Integralgleichung und ihrer Normalenableitung auf der Oberfläche des betrachteten Gebiets bestimmt, die bei Wahl geeigneter Kopplungsparameter nur eine Lösung besitzt. Eine detaillierte Beschreibung beider Verfahren findet sich in [190]. In der vorliegenden Arbeit wird die Randelementmethode nur für die Modellierung halbunendlicher Gebiete verwendet, die über eine Kopplungsfläche mit der Struktur verbunden sind. An dieser Kopplungsfläche ist zunächst weder der Schalldruck  $p$  noch der Schallfluss  $q$  bekannt, so dass kein reines Neumannproblem vorliegt und damit keine fiktiven Eigenmoden auftreten.

Einen Überblick über weitere Möglichkeiten zur Effizienzsteigerung sowie der Reduktion der Rechenzeit von Randelementverfahren findet sich bei von Estorff [195].

#### 4.6.1.1 Schallausbreitung im Halbraum

Bisher wurde die Randelementformulierung für den Vollraum betrachtet, die die Diskretisierung des gesamten Randes des zu untersuchenden Gebietes erfordert. Im Rahmen der Untersuchung von Schalltransmissionsproblemen treten jedoch in der Regel halbunendliche Gebiete auf, bei denen die Diskretisierung in einem bestimmten Abstand vom Lasteinleitungsgebiet abgebrochen wird. In Abbildung 4.5(b) ist ein derartiges Halbraumproblem dargestellt.

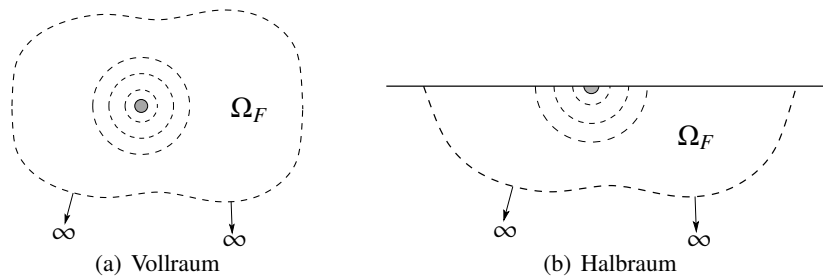


Abbildung 4.5: Schallausbreitung im Vollraum und im Halbraum. Der graue Kreis/Halbkreis symbolisiert die Schallquelle.

Durch diesen Abbruch der Diskretisierung ist die Lösung fehlerbehaftet, jedoch hat dieser Abbruchfehler nur in einem relativ kleinen Bereich in der Nähe des Abbruchrandes der Diskretisierung einen Einfluss auf die Lösung [64, 65, 113]. Aufgrund der zuvor genannten Arbeiten wird die Diskretisierungsfläche so groß gewählt, dass sie rund dreimal so groß ist wie die Kopplungsfläche. Für Problemstellungen, die gegenüber dem Abbruch der Diskretisierung sensibler sind, schlagen Harari et al. die Verwendung sogenannter unendlicher Randelemente vor [88], die an die Randelemente am Rand der Diskretisierung gekoppelt werden. Des Weiteren wurde von Seybert et al. eine Randelementformulierung vorgestellt, die die Fundamentallösung für den Halbraum verwendet [168, 169, 128]. Neben schallharten und schallweichen Halbraumrändern können auch beliebige Impedanzen berücksichtigt werden. Allerdings ist dieses Verfahren auf spezielle Probleme mit ebenen Randflächen beschränkt, so dass in der vorliegenden Arbeit die vollständige, dreidimensionale Randelementformulierung zur Beschreibung des Halbraumes verwendet wird.

#### 4.6.2 Scaled Boundary Finite Elemente Methode

Im folgenden Abschnitt werden die grundlegenden Gleichungen und Herleitungen der *Scaled Boundary Finite Element Method* (SBFEM) für die Wellenausbreitung in kompressiblen Fluiden vorgestellt.

Die sogenannte *Infinitesimal finite element cell method* wurde von Wolf und Song entwickelt [202, 204] und wird nun als *Scaled Boundary Finite Element Method* (SBFEM) bezeichnet [203]. Anwendung findet die SBFEM hauptsächlich bei der Analyse von Wellenausbreitungsvorgängen im elastischen Halbraum wie der Boden-Bauwerk Interaktion [124]. In einigen Problemen, die in

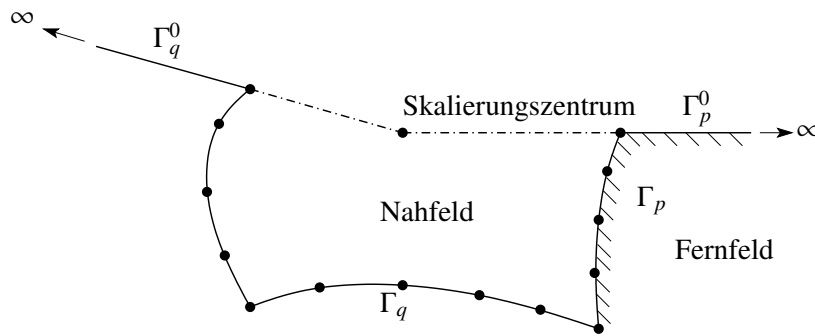


Abbildung 4.6: Diskretisierung des unberandeten Mediums in der SBFEM

Kapitel 7 betrachtet werden, treten unendlich ausgedehnte Fluidgebiete auf. Die Schalldruckverteilung innerhalb dieser Fluide ist hier nicht relevant, so dass diese Gebiete nur als absorbierende Randbedingung wirken. Die Diskretisierung dieser Gebiete erfolgt mit der SBFEM, mit deren Hilfe jedoch auch die Schalldruckverteilung innerhalb unendlich ausgedehnter Fluide bestimmt werden kann. Dazu ist jedoch eine andere Formulierung nötig, die in [203] beschrieben ist.

In der SBFEM wird das zu untersuchende Gebiet in ein Nahfeld und ein Fernfeld unterteilt, wobei das Fernfeld das unendlich ausgedehnte Gebiet darstellt. Das Prinzip ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Darin kennzeichnet  $\Gamma_p$  einen Dirichletrand und  $\Gamma_q$  einen Neumannrand. Um Wellenreflexionen am Rand des diskretisierten Gebietes zu vermeiden, wird die Fläche zwischen Nahfeld und Fernfeld mit Scaled Boundary Finiten Elementen diskretisiert. Im Gegensatz zur Randelementmethode ist die freie Oberfläche, die in Abbildung 4.6 mit  $\Gamma^0$  bezeichnet ist, nicht zu diskretisieren. Analog zur Randelementmethode wird auch hier die Dimension der Diskretisierung um eine Dimension im Vergleich zur betrachteten Problemstellung vermindert.

Bei Scaled Boundary Finiten Elementen wird die Geometrie eines dreidimensionalen Gebietes durch zweidimensionale Elemente mit  $\eta$ - $\zeta$ -Koordinatensystem und eine radiale Koordinate  $\xi$  beschrieben. Dieses Koordinatensystem ist mit dem globalen kartesischen Koordinatensystem über die Scaled Boundary Transformation verknüpft. Die Koordinate  $\xi$  skaliert den Abstand des Elements vom Skalierungszentrum  $\xi = 0$  zum Rand  $\xi = 1$  (vgl. Abbildung 4.7). Somit ist  $\xi$  ein Skalierungsfaktor. Das neue Koordinatensystem erlaubt in umlaufender Richtung die Herleitung einer Formulierung, die analog zur FEM auf einem gewichteten Residuum basiert. Somit wird die zu lösende partielle Differentialgleichung in radialer Richtung in eine gewöhnliche Differentialgleichung in  $\xi$  transformiert. Die Koeffizienten dieser transformierten Differentialgleichung werden in umlaufender Richtung durch eine Finite Elemente Approximation berechnet. Wird ein unendlich ausgedehntes Gebiet betrachtet, so zeigt die radiale Koordinate vom Rand des betrachteten Gebiets ins Unendliche, wo die Abstrahlungsbedingung (vgl. Gleichung (3.17)) als analytische

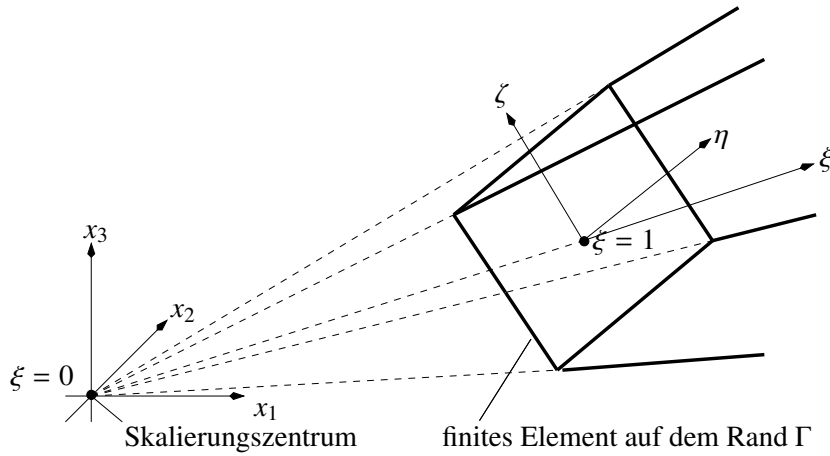


Abbildung 4.7: Koordinatensystem für die SBFEM Transformation dreidimensionaler Probleme

Lösung der transformierten Differentialgleichung im Modell berücksichtigt werden kann.

#### 4.6.2.1 Grundgleichungen der SBFEM

Grundlage der hier vorgestellten Formulierung ist die skalare Wellengleichung (3.12), die in Kapitel 3.3 hergeleitet wurde. Die Herleitungen für elastodynamische Probleme finden sich z.B. bei Wolf [204] oder Lehmann [124]. Die Geometrie eines finiten Elements auf dem Rand wird durch die Interpolation seiner Knotenkoordinaten  $\mathbf{x}_i$  mit Hilfe der lokalen Koordinaten  $\eta$  und  $\zeta$

$$x_i(\eta, \zeta) = \mathbf{N}(\eta, \zeta) \mathbf{x}_i \quad (4.74)$$

sowie den Formfunktionen  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\eta, \zeta) = [N_1 \ N_2 \ \dots]$  beschrieben. Ein Punkt  $\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)$  innerhalb des betrachteten Gebiets ergibt sich durch die Skalierung des zugehörigen Punktes  $\mathbf{x}(\eta, \zeta)$

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \xi \mathbf{x}(\eta, \zeta) , \quad (4.75)$$

der auf dem Rand liegt. Für den Skalierungsfaktor  $\xi = 1$  ergibt sich der Rand des Gebiets und für  $\xi = 0$  das Skalierungszentrum (vgl. Abbildung 4.7). Um den Laplaceoperator  $\Delta$  in das neue  $(\xi, \eta, \zeta)$ -Koordinatensystem zu transformieren, wird die Jacobimatrix benötigt

$$\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} x_{1,\xi} & x_{2,\xi} & x_{3,\xi} \\ x_{1,\eta} & x_{2,\eta} & x_{3,\eta} \\ x_{1,\zeta} & x_{2,\zeta} & x_{3,\zeta} \end{bmatrix} , \text{ mit } x_i = x_i(\xi, \eta, \zeta) . \quad (4.76)$$

Die partiellen Ableitungen  $x_{i,\xi}$ ,  $x_{i,\eta}$  und  $x_{i,\zeta}$  ergeben sich mit Hilfe der Gleichungen (4.74) und (4.75) zu

$$x_{i,\xi}(\xi, \eta, \zeta) = x_i(\eta, \zeta) = \mathbf{N} \mathbf{x}_i , \quad (4.77)$$

$$x_{i,\eta}(\xi, \eta, \zeta) = \xi x_{i,\eta}(\eta, \zeta) = \xi \mathbf{N}_{,\eta} \mathbf{x}_i \quad \text{und} \quad (4.78)$$

$$x_{i,\zeta}(\xi, \eta, \zeta) = \xi x_{i,\zeta}(\eta, \zeta) = \xi \mathbf{N}_{,\zeta} \mathbf{x}_i . \quad (4.79)$$

Daraus folgt für die Jacobimatrix

$$\mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi x_{1,\eta} & \xi x_{2,\eta} & \xi x_{3,\eta} \\ \xi x_{1,\zeta} & \xi x_{2,\zeta} & \xi x_{3,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \xi & \\ & & \xi \end{bmatrix} \mathbf{J}(\eta, \zeta) \quad (4.80)$$

$$\text{mit } \mathbf{J}(\eta, \zeta) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_{1,\eta} & x_{2,\eta} & x_{3,\eta} \\ x_{1,\zeta} & x_{2,\zeta} & x_{3,\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

und  $x_i = x_i(\eta, \zeta)$ .

Die Inverse der Jacobimatrix  $\mathbf{J}^{-1}(\eta, \zeta)$  lautet somit

$$\mathbf{J}^{-1}(\eta, \zeta) = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} x_{2,\eta}x_{3,\zeta} - x_{3,\eta}x_{2,\zeta} & x_{3,x_{2,\zeta}} - x_{2,x_{3,\zeta}} & x_{2,x_{3,\eta}} - x_{3,x_{2,\eta}} \\ x_{3,\eta}x_{1,\zeta} - x_{1,\eta}x_{3,\zeta} & x_{1,x_{3,\zeta}} - x_{3,x_{1,\zeta}} & x_{3,x_{1,\eta}} - x_{1,x_{3,\eta}} \\ x_{1,\eta}x_{2,\zeta} - x_{2,\eta}x_{1,\zeta} & x_{2,x_{1,\zeta}} - x_{1,x_{2,\zeta}} & x_{1,x_{2,\eta}} - x_{2,x_{1,\eta}} \end{bmatrix}, \quad (4.82)$$

mit  $x_i = x_i(\eta, \zeta)$ .

Zur Vereinfachung werden drei Vektoren  $\mathbf{b}^1$ ,  $\mathbf{b}^2$  und  $\mathbf{b}^3$  eingeführt

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} x_{2,\eta}x_{3,\zeta} - x_{3,\eta}x_{2,\zeta} \\ x_{3,\eta}x_{1,\zeta} - x_{1,\eta}x_{3,\zeta} \\ x_{1,\eta}x_{2,\zeta} - x_{2,\eta}x_{1,\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} x_{3,x_{2,\zeta}} - x_{2,x_{3,\zeta}} \\ x_{1,x_{3,\zeta}} - x_{3,x_{1,\zeta}} \\ x_{2,x_{1,\zeta}} - x_{1,x_{2,\zeta}} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} x_{2,x_{3,\eta}} - x_{3,x_{2,\eta}} \\ x_{3,x_{1,\eta}} - x_{1,x_{3,\eta}} \\ x_{1,x_{2,\eta}} - x_{2,x_{1,\eta}} \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

die jeweils eine Spalte der inversen Jacobimatrix beinhalten.

Im folgenden Abschnitt wird nun die Scaled Boundary Transformation auf die skalare Wellengleichung (3.12) angewendet. Diese Transformation beeinflusst nur die Ableitungen nach den lokalen Koordinaten. Alle übrigen Größen, wie zum Beispiel der Schalldruck, werden weiterhin im ursprünglichen Koordinatensystem  $x_i$  dargestellt. Somit ist in Gleichung (3.12) lediglich der Laplaceoperator  $\Delta$  zu modifizieren. Definiert man  $\boldsymbol{\tau} = \nabla p$ , so kann die Wellengleichung (3.12) als

$$\mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\tau}_\xi + \frac{1}{\xi} [\mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\tau}_\eta + \mathbf{b}_3^T \boldsymbol{\tau}_\zeta] - \frac{1}{c^2} \ddot{p} = 0 \quad (4.86)$$

formuliert werden. Multipliziert man nun Gleichung (4.86) mit einer Wichtungsfunktion  $w = w(\xi, \eta, \zeta)$  und integriert über das Gebiet  $d\Omega$ , so ergibt sich die schwache Form

$$\int_{\Omega} w \mathbf{b}_1^T \boldsymbol{\tau}_\xi d\Omega + \int_{\Omega} w \frac{1}{\xi} [\mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\tau}_\eta + \mathbf{b}_3^T \boldsymbol{\tau}_\zeta] d\Omega - \int_{\Omega} w \frac{1}{c^2} \ddot{p} d\Omega = 0 \quad (4.87)$$

mit

$$d\Omega = \xi |\mathbf{J}(\eta, \zeta)| d\xi d\eta. \quad (4.88)$$



Nach partieller Integration des zweiten Terms von Gleichung (4.87) und Anwendung des transformierten Laplaceoperators auf die Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}(\eta, \zeta)$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{b}_1 \mathbf{N}(\eta, \zeta) \quad (4.89)$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{b}_2 \mathbf{N}(\eta, \zeta)_{,\eta} + \mathbf{b}_3 \mathbf{N}(\eta, \zeta)_{,\zeta} \quad (4.90)$$

wobei sowohl  $\mathbf{B}_1$  als auch  $\mathbf{B}_2$  von  $\xi$  unabhängig sind, ergibt sich die Scaled Boundary Finite Element Gleichung für den Zeitbereich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{p}(\xi)_{,\xi\xi} + \left( (s-1)\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T \right) \xi \mathbf{p}(\xi)_{,\xi} \\ + \left( (s-2)\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2 \right) \mathbf{p}(\xi) - \mathbf{M}_0 \xi^2 \ddot{\mathbf{p}}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Darin ist  $s$  die Dimension des betrachteten Gebiets. Wird für den Druck wiederum ein zeitharmonischer Verlauf angenommen (vgl. Gleichung (3.13)), so ergibt sich die Scaled Boundary Finite Element Gleichung für den Frequenzbereich

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{p}(\xi)_{,\xi\xi} + \left( (s-1)\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T \right) \xi \mathbf{p}(\xi)_{,\xi} \\ + \left( (s-2)\mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_2 \right) \mathbf{p}(\xi) + \omega^2 \mathbf{M}_0 \xi^2 \mathbf{p}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Die in den Gleichungen (4.91) und (4.92) eingeführten Elementmatrizen sind zu

$$\mathbf{E}_0 = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1 |\mathbf{J}| d\eta \quad (4.93)$$

$$\mathbf{E}_1 = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_1 |\mathbf{J}| d\eta \quad (4.94)$$

$$\mathbf{E}_2 = \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_2 |\mathbf{J}| d\eta \quad (4.95)$$

$$\mathbf{M}_0 = \frac{1}{c^2} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta \quad (4.96)$$

gegeben.  $\mathbf{E}_0$  und  $\mathbf{M}_0$  sind positiv definit,  $\mathbf{E}_1$  ist unsymmetrisch und  $\mathbf{E}_2$  semi-positiv definit. Auf einer Fläche, für die der Abstand zum Skalierungszentrum konstant ist, können die Knotenlasten  $\mathbf{f}(\xi)$  zu

$$\mathbf{f}(\xi) = \xi^{s-2} \left( \mathbf{E}_0 \xi \mathbf{p}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{p}(\xi) \right) \quad (4.97)$$

berechnet werden. Auf dem Rand des betrachteten Gebiets  $\Omega$ , d.h. für  $\xi = 1$ , steht diese Kraft im Gleichgewicht mit dem Produkt der dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}_\infty(\omega)$  und dem Fluidruck  $\mathbf{p}(\xi = 1)$  auf dem Rand

$$\mathbf{r}(\omega) = -\mathbf{f}(\xi = 1) \stackrel{!}{=} \mathbf{S}_\infty(\omega) \mathbf{p}(\xi = 1). \quad (4.98)$$

Führt man nun die Gleichungen (4.92), (4.97) und (4.98) zusammen, so lässt sich die Scaled Boundary Finite Element Gleichung in dynamischen Steifigkeiten ausdrücken

$$(\mathbf{S}_\infty(\omega) + \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_0^{-1} \left( \mathbf{S}_\infty(\omega) + \mathbf{E}_1^T \right) - (s-2)\mathbf{S}_\infty(\omega) - \omega \mathbf{S}_\infty(\omega)_{,\omega} - \mathbf{E}_2 + \omega^2 \mathbf{M}_0 = 0. \quad (4.99)$$

Es lässt sich zeigen, dass die dynamische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}_\infty(\omega)$  symmetrisch ist [204]. Die Effizienz der SBFEM hängt nicht zuletzt von der effizienten Berechnung dieser dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}_\infty(\omega)$  ab. In den beiden folgenden Abschnitten sollen nun zwei Möglichkeiten zur Lösung aufgezeigt werden.

#### 4.6.2.2 Asymptotische Erweiterung

Eine Möglichkeit zur Berechnung der dynamischen Steifigkeitsmatrix für hohe Frequenzen besteht in der Entwicklung einer Reihe in Potenzen von  $i\omega$  [204]

$$\mathbf{S}_\infty(\omega) = i\omega\mathbf{C}_\infty + \mathbf{K}_\infty + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i(i\omega)^{-i}. \quad (4.100)$$

Die Terme  $\mathbf{C}_\infty$  und  $\mathbf{K}_\infty$  beschreiben den singulären Term. Der reguläre Term hingegen wird als Reihe der Ordnung  $m$  angenähert. Zur Bestimmung der Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{C}_\infty$ ,  $\mathbf{K}_\infty$  und  $\mathbf{A}_i$  ist zunächst das Eigenwertproblem

$$\mathbf{M}_0\Phi = \mathbf{E}_0\Phi [\lambda^2] \quad (4.101)$$

zu lösen. Da  $\mathbf{M}_0$  und  $\mathbf{E}_0$  positiv definit sind, sind die Eigenwerte  $\lambda$  stets positiv.  $[\lambda]$  kennzeichnet eine Diagonalmatrix. Die Matrix  $\Phi$  der Eigenvektoren wird zu

$$\Phi^T \mathbf{E}_0 \Phi = \mathbf{I} \quad (4.102)$$

normiert, wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix ist. Die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{C}_\infty$  wird derart gewählt, dass sie die Abstrahlungsbedingung (3.13) erfüllt und einem harmonischem Zeitverlauf  $e^{i\omega t}$  folgt

$$\mathbf{C}_\infty = (\Phi^{-1})^T [\lambda] \Phi^{-1}. \quad (4.103)$$

Für die weiteren Berechnungen sind die Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_2$  mittels

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \Phi^T \mathbf{E}_1 \Phi \quad \text{und} \quad (4.104)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_2 = \Phi^T \mathbf{E}_2 \Phi \quad (4.105)$$

zu transformieren. Mit Hilfe der Matrizen  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  und  $[\lambda]$  kann nun eine weitere Matrix  $\tilde{\mathbf{K}}_\infty$  berechnet werden

$$[\lambda] \tilde{\mathbf{K}}_\infty + \tilde{\mathbf{K}}_\infty [\lambda] = -[\lambda] \tilde{\mathbf{E}}_1^T - \tilde{\mathbf{E}}_1 [\lambda] + (s-1)[\lambda], \quad (4.106)$$

die nach einer Transformation (vgl. Gleichung (4.110)) in die asymptotische Erweiterung (4.100) eingeht. Mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} [\lambda] \tilde{\mathbf{A}}_{i+1} + \tilde{\mathbf{A}}_{i+1} [\lambda] = & -(\tilde{\mathbf{K}}_\infty + \tilde{\mathbf{E}}_1) \tilde{\mathbf{A}}_i - \tilde{\mathbf{A}}_i (\tilde{\mathbf{K}}_\infty + \tilde{\mathbf{E}}_1^T) \\ & - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\mathbf{A}}_j \tilde{\mathbf{A}}_{i-j} + (s-i-2) \tilde{\mathbf{A}}_i \quad i = 2, 3, \dots, m \end{aligned} \quad (4.107)$$

können nun die Matrizen  $\tilde{\mathbf{A}}_i$  bestimmt werden. Die Startwerte für diese Rekursion für die Schritte  $i = 1$  und  $i = 2$  sind zu

$$[\lambda] \tilde{\mathbf{A}}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_1 [\lambda] = -(\tilde{\mathbf{K}}_\infty + \tilde{\mathbf{E}}_1) (\tilde{\mathbf{K}}_\infty + \tilde{\mathbf{E}}_1^T) + (s-2) \tilde{\mathbf{K}}_\infty + \tilde{\mathbf{E}}_2 \quad \text{und} \quad (4.108)$$

$$[\lambda] \tilde{\mathbf{A}}_2 + \tilde{\mathbf{A}}_2 [\lambda] = -(\tilde{\mathbf{K}}_\infty + \tilde{\mathbf{E}}_1) \tilde{\mathbf{A}}_1 - \tilde{\mathbf{A}}_1 (\tilde{\mathbf{K}}_\infty + \tilde{\mathbf{E}}_1^T) + (s-3) \tilde{\mathbf{A}}_1 \quad (4.109)$$

gegeben. Durch Transformation der in den Gleichungen (4.106) und (4.107) berechneten Matrizen mittels

$$\mathbf{K}_\infty = (\Phi^{-1})^T \tilde{\mathbf{K}}_\infty \Phi^{-1} \quad \text{und} \quad (4.110)$$

$$\mathbf{A}_i = (\Phi^{-1})^T \tilde{\mathbf{A}}_i \Phi^{-1} \quad (4.111)$$

können die übrigen Matrizen der asymptotischen Erweiterung (4.100) bestimmt werden. Die asymptotische Erweiterung kann dann für eine hohe Frequenz  $\omega_h$  berechnet werden, um einen Startwert für die Berechnung der dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}_\infty(\omega)$  zu erhalten. Ausgehend von diesem Startwert kann Gleichung (4.99) nun für kleiner werdende  $\omega$  über den gesamten Frequenzbereich integriert werden, der betrachtet werden soll. Der Nachteil dieses Vorgehens ist offensichtlich: selbst für den Fall, dass nur eine einzige Frequenz  $\omega_d$  berechnet werden soll, muss die Integration für den gesamten Frequenzbereich  $\omega_h$  bis  $\omega_d$  erfolgen. Daher ist dieses Verfahren für eine effiziente Berechnung der dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}_\infty(\omega)$  nur bedingt geeignet.

#### 4.6.2.3 Padé Approximation

Im Allgemeinen konvergieren Padé Reihen deutlich schneller als die zugehörige Potenzreihe. Daher soll in diesem Abschnitt eine Padé Reihe zur Formulierung lokal transmittierender Ränder beschrieben werden, die von Song [173] vorgestellt wurde. Die Padé Entwicklung wird hier direkt aus Gleichung (4.100) formuliert. Sie lautet in  $i\omega$

$$\mathbf{S}^\infty(\omega) = i\omega\mathbf{C}_\infty + \mathbf{K}_\infty + \mathbf{Q}(\omega)^{-1}\mathbf{P}(\omega), \quad (4.112)$$

wobei  $\mathbf{P}(\omega)$  und  $\mathbf{Q}(\omega)$  Polynome in  $(i\omega)^{-k}$  sind:

$$\mathbf{P}(\omega) = \sum_{k=1}^M \mathbf{P}^k (i\omega)^{-k} \text{ bzw.} \quad (4.113)$$

$$\mathbf{Q}(\omega) = \sum_{k=1}^M \mathbf{Q}^k (i\omega)^{-k} \text{ mit } \mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}. \quad (4.114)$$

Um zu verhindern, dass triviale Lösungen auftreten, wird für die Polynome von  $\mathbf{P}(\omega)$  und  $\mathbf{Q}(\omega)$  die gleiche Ordnung gewählt. Die  $2M$  Koeffizientenmatrizen von  $\mathbf{P}(\omega)$  und  $\mathbf{Q}(\omega)$  werden mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs mit der Potenzreihe aus Gleichung (4.100) ermittelt

$$\sum_{k=1}^{2M} \mathbf{A}^k (i\omega)^{-k} \approx \mathbf{Q}(\omega)^{-1} \mathbf{P}(\omega). \quad (4.115)$$

Multipliziert man beide Seiten von Gleichung (4.115) mit  $\mathbf{Q}(\omega)$  und substituiert die Reihen aus (4.113) und (4.114), so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^M \mathbf{Q}^k (i\omega)^{-k} \sum_{k=1}^{2M} \mathbf{A}^k (i\omega)^{-k} \approx \sum_{k=1}^{2M} \left( \mathbf{A}^k + \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{Q}^j \mathbf{A}^{k-j} \right) (i\omega)^{-k} = \sum_{k=1}^M \mathbf{P}^k (i\omega)^{-k}, \quad (4.116)$$

wobei für  $j > M$   $\mathbf{Q}^j = \mathbf{0}$  gilt. Die letzten  $M$  Terme der rechten Seite werden mit Nullen aufgefüllt. Das resultierende Gleichungssystem ist erfüllt, wenn die Koeffizientenmatrizen der beiden Serien für alle Terme der Serie gleich sind. Die letzten  $M$  Terme aus Gleichung (4.116) führen auf ein Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^M \mathbf{Q}^j \mathbf{A}^{k-j} + \mathbf{A}^k = \mathbf{0} \quad k = M+1, M+2, \dots, 2M, \quad (4.117)$$

welches zur Bestimmung der Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{Q}^j$  dient. In (4.117) wird berücksichtigt, dass für  $j > M$   $\mathbf{Q}^j = \mathbf{0}$  ist. Unter Berücksichtigung der Symmetrie von  $\mathbf{A}^i$  lautet die Transponierte von Gleichung (4.117)

$$\sum_{j=1}^M \mathbf{A}^{k-j} \mathbf{Q}^{jT} = -\mathbf{A}^k \quad k = M+1, M+2, \dots, 2M. \quad (4.118)$$

Aus dieser Gleichung können nun direkt die Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{Q}^j$  bestimmt werden. Die Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{P}^k$  aus Gleichung (4.113) können nun mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\mathbf{P}^k = \mathbf{A}^k + \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{Q}^j \mathbf{A}^{k-j} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (4.119)$$

für die ersten  $M$  Terme aus Gleichung (4.116) bestimmt werden. Die dynamische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}^\infty(\omega)$  kann nun mit Hilfe von Gleichung (4.112) für eine gewählte Genauigkeit, die von der Ordnung  $M$  abhängt, berechnet werden. In [173] wird der Einfluss der Ordnung  $M$  auf die Genauigkeit der Lösung für kleinere Beispiele eingehend untersucht. In Abschnitt 6.6 wird an zwei- und dreidimensionalen Testfällen die Effizienz dieser Padé Approximation untersucht.

Weitere Möglichkeiten zur Steigerung der Effizienz der SBFEM werden z.B. von Lehmann [124] vorgestellt.

## 4.7 Kopplung finiter und unendlicher Gebiete

In den beiden folgenden Abschnitten werden die Verfahren erläutert, mit denen unendlich ausgehende akustische Fluide an die zuvor präsentierte FE Formulierung gekoppelt werden können.

### 4.7.1 Kopplung der FEM mit der REM

In diesem Abschnitt wird die Kopplung der FE Formulierung für die Struktur mit der Randelementformulierung für das halbumendliche akustische Fluid beschrieben. Die Kopplungsbedingungen sind bereits in Abschnitt 4.3 angegeben worden. In Abbildung 4.8 ist das verwendete Koordinatensystem dargestellt.

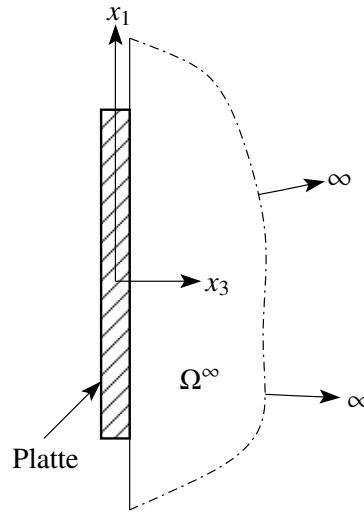
Im Unterschied zur Kopplung der FE Teilgebiete muss hier jedoch zusätzlich auch der Zusammenhang zwischen Schallfluss und den Verschiebungen der Platte in der Randelementformulierung berücksichtigt werden. Die Kopplung kann erneut mittels des Prinzips der virtuellen Arbeit formuliert werden [122]. Die algebraische Gleichung für die FE Formulierung der Platte ergibt sich zu

$$(\mathbf{K}^S - \omega^2 \mathbf{M}^S) \mathbf{u} = -\mathbf{C} \mathbf{p}^\infty, \quad (4.120)$$

wobei die Kopplungsmatrix  $\mathbf{C}$  bereits in Gleichung (4.37) definiert wurde und  $\mathbf{p}^\infty$  die Schalldrücke des Randelementgebiets auf dem Interface  $\Gamma_i$  der beiden Teilgebiete enthält. Für den Koppelrand  $\Gamma_i$  lautet die modifizierte Randelementgleichung

$$\rho_F \omega^2 \mathbf{G} \mathbf{u}_3 - \mathbf{H} \mathbf{p}^\infty = \mathbf{0}. \quad (4.121)$$

Für den übrigen Teil des Randelementgebiets sind keine Modifikationen an der Formulierung vorzunehmen.

Abbildung 4.8: Kopplung der Mindlinplatte mit einem halbunendlichen akustischen Fluid  $\Omega^\infty$ 

#### 4.7.2 Kopplung der FEM mit der SBFEM

Die elastische Struktur kann nicht direkt an das halbunendliche akustische Fluid gekoppelt werden, dass mit Hilfe der SBFEM diskretisiert wird. Um die Eindeutigkeit der in Abschnitt 4.6.2 beschriebenen Transformation des Laplaceoperators sicherzustellen, ist eine zusätzliche Schicht finiter Fluidelemente einzufügen. Zur Kopplung der Teilgebiete ist die dynamische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}^\infty(\omega)$ , die für jede Frequenz  $\omega$  berechnet werden muss, zur FE Gleichung für das akustische Fluid zu addieren. Das resultierende Gesamtgleichungssystem lautet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^F - \omega^2 \mathbf{M}^F + \mathbf{S}^\infty(\omega) & -\rho \omega^2 \mathbf{C}^T \\ -\mathbf{C} & \mathbf{K}^S - \omega^2 \mathbf{M}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}. \quad (4.122)$$

### 4.8 Programmtechnische Umsetzung

Als Programmiersprache für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Programmpaket dient C++ [176]. Durch Verwendung dieser Programmiersprache ist das Programm sehr modular aufgebaut und kann auf Grund der verwendeten Polymorphie sehr leicht um weitere Elemente oder Materialgesetze erweitert werden. Für jedes neue Element nur ein gewisser, genau definierter Satz von Funktionen zu implementieren ist.

Um den Aufwand für die Programmierung von Gleichungslösern auf ein Minimum zu reduzieren, wurde auf frei verfügbare Bibliotheken zurückgegriffen. Diese Pakete sind in der Lage, dünn besetzte Matrizen, wie sie im Rahmen von FE Simulationen auftreten, effizient zu speichern und die resultierenden Gleichungssysteme schnell zu lösen. Als geeignete Basis für den FE-Löser hat sich das *Portable and Extensible Toolkit for Scientific Computation* (PETSc) erwiesen [19, 18]. Dieses Paket ist in der Programmiersprache C geschrieben und besitzt daneben Schnittstellen für die Sprachen C++ und Fortran. Es baut auf den Bibliotheken BLAS und LAPACK auf, die sehr effiziente Funktionen für Matrix- und Vektoroperationen bieten (vgl. Abbildung 4.9). Des Weiteren ist durch die Verwendung des *Message Passing Interface* (MPI) [136, 137] die Nutzung dieser Bibliothek auf Hochleistungsrechnern möglich. Da die gesamte parallele Kommunikation in den

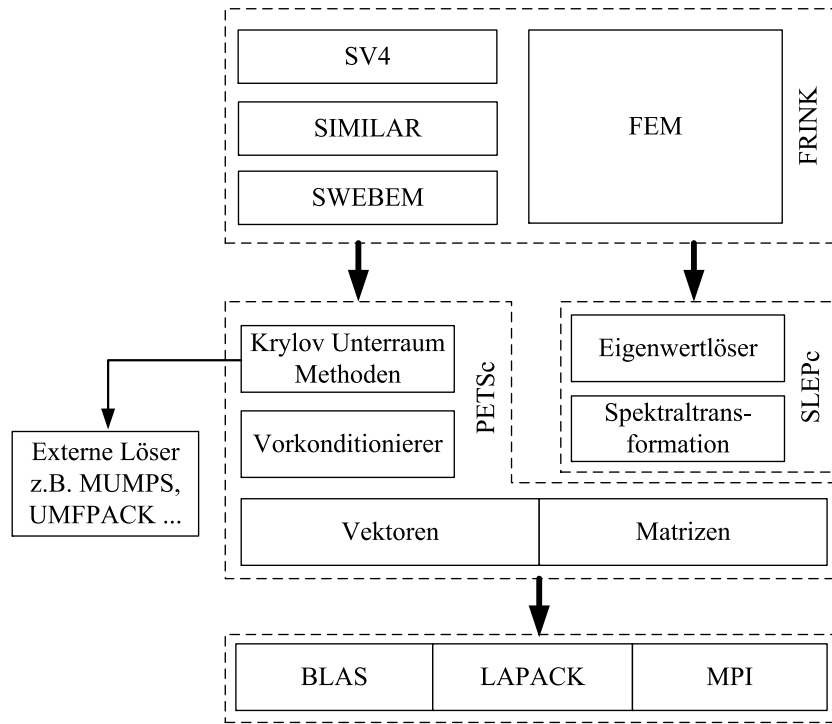


Abbildung 4.9: Komponenten des implementierten FE-Lösers

von PETSc bereitgestellten Funktionen gekapselt ist, ist der Aufwand der parallelen Programmierung durch den Endanwender sehr gering. PETSc stellt eine Vielzahl von Objekten bereit, die für die Entwicklung von FE-Lösern benötigt werden. Dazu zählen unter anderem Matrizen, Vektoren, Gleichungslöser und Vorkonditionierer. Diese Objekte regeln die Kommunikation untereinander in der Regel intern, wodurch sich die Entwicklung einer parallelen Anwendung stark vereinfacht. So wird bei der Assemblierung der Systemsteifigkeitsmatrix dafür Sorge getragen, dass Einträge, die zu Zeilen gehören, die auf anderen Rechnern gespeichert werden, automatisch dorthin geschickt werden. Trotz all dieser zusätzlichen Funktionalität ist der Effizienzverlust selbst auf Einprozessorrechnern gegenüber einer reinen BLAS/LAPACK Implementierung gering. Die Effizienz der Bibliothek PETSc wurde in [20] untersucht.

Ein weiterer Vorteil der PETSc-Bibliothek sind die Schnittstellen zu zahlreichen weiteren Bibliotheken. Für die Lösung von Eigenwertproblemen wurde im Rahmen dieser Arbeit die Bibliothek SLEPc (*Scalable Library for Eigenvalue Problem Computations*) verwendet [92, 93]. Diese Bibliothek baut direkt auf PETSc auf und erweitert es um eine Vielzahl von Lösern für Eigenwertprobleme. Des Weiteren ermöglicht PETSc das Einbinden einer Vielzahl von weiteren Bibliotheken zum Lösen von Gleichungssystemen. Dabei handelt es sich in der Regel um direkte Löser, die aufgrund der nahezu singulären Systemmatrizen, die sich aus Gleichung (4.38) ergeben, zumeist schneller eine Lösung berechnen als die von PETSc bereit gestellten Krylovverfahren. Besonders effizient ist der *Multifrontal Massively Parallel sparse direct Solver* MUMPS [8, 7], der eine parallele LU oder Cholesky Zerlegung mit Pivotisierung durchführt.

Durch eine Vielzahl von Kommandozeilenparametern ist es möglich, eine Großzahl von Einstel-

lungen der Gleichungslöser und Vorkonditionierer ohne erneutes kompilieren des Programmes zu ändern. Dadurch können sehr einfach verschiedene Gleichungslöser bezüglich ihrer Effizienz miteinander verglichen werden [42].

Ein weiterer wichtiger Faktor zur Steigerung der Effizienz von parallelen Programmen liegt in der Minimierung der Kommunikation zwischen den einzelnen Rechnern, die das Gesamtsystem lösen. Um das Gesamtproblem optimal in einzelne Subsysteme zu zerlegen, wird das Paket ParMetis verwendet [110]. Dieses Paket kann ebenfalls direkt in PETSc eingebunden werden und partitioniert die Systemmatrix derart, dass der Kommunikationsaufwand zwischen den einzelnen Rechnern bei der Lösung des Gleichungssystems minimiert wird.

Trotz dieser vielfältigen Möglichkeiten, die die Verwendung von PETSc bietet, sind die Änderungen, die am FE-Löser vorzunehmen waren, verhältnismäßig gering. Es waren nur die Speicherwaltungs-routinen für die Systemmatrizen und -vektoren, die Ansteuerung des Gleichungslösers sowie die Ausgabe der Ergebnisse zu modifizieren. Des Weiteren verwendet PETSc spezielle Funktionen zum Assemblieren der Systemmatrizen, die durch das Ausnutzen von Blockstrukturen in den Matrizen sehr effizient arbeiten. Derartige Blöcke treten bei Elementmatrizen von Finiten Elementen, bei denen jeder Knoten in der Regel mehr als einen Freiheitsgrad besitzt, auf.

Für die Behandlung unendlicher Gebiete sind ebenfalls zwei Module im Löser vorgesehen. Eine Möglichkeit besteht in der Verwendung des Randelementelösers SWEBEM [190], der in dieser Arbeit zur Berechnung von Referenzlösungen verwendet wird. Alternativ kann nun auch ein SBFEM Löser zur Berücksichtigung unendlicher Gebiete verwendet werden. Die erste Version dieses Lösers, dessen Name SIMILAR ist, wird ausführlich von Wolf beschrieben [202] und verwendet die asymptotische Erweiterung für die Berechnung des Startwertes zur Lösung von Gleichung (4.99). Die neuere Version dieses SBFEM Lösers, der die Padé Approximation verwendet und SV4 heißt, ist ebenfalls eingebunden. Diese Module werden als zusätzliche Bibliotheken bei Bedarf in das Programm eingebunden und werden über Parameter im Eingabedatensatz des FE-Lösers angesteuert. Durch diesen Ansatz bleibt die Modularität des FE-Lösers erhalten, da auf diese Bibliotheken nur über eine sehr geringe Anzahl von Schnittstellen zugegriffen wird.

Die Aufbereitung der Geometrie sowie die Vernetzung erfolgt mit Hilfe von MSC.Patran [183], das mit Hilfe von selbstdefinierten PCL-Makros die Daten für den FE-Löser modifiziert und Eingabedatensätze im nativen Format des FE-Lösers erstellt. Die Visualisierung der Diskretisierungen und Ergebnisse erfolgt mit Hilfe von Tecplot der Fa. Amtec [9].

Ein großes Problem bei der Steigerung der Effizienz von Finiten Element Verfahren ist die Auswahl eines geeigneten Gleichungslösers. Da im Rahmen dieser Arbeit in der Folge ein monolithischer Ansatz gewählt wird, bei dem alle Teilgebiete in ein Gesamtgleichungssystem zusammengefasst werden, wird ein direkter Gleichungslöser verwendet, da sich bei der Verwendung von iterativen Lösern bereits bei kleinen Anwendungsbeispielen und kleinen Wellenzahlen Probleme zeigen [42]. Als Testbeispiel zur Untersuchung dient das in Abbildung 4.10 dargestellte System, dass aus zwei Fluidgebieten besteht, die durch eine Glasscheibe voneinander getrennt sind. Dieses Beispiel, das von Wu und Dandapani vorgestellt wurde [206], untersucht Langer eingehend [122]. Das akustische Fluid ist Luft ( $c_F = 346 \text{ m/s}$ ,  $\rho_F = 1,21 \text{ kg/m}^3$ ) und das allseitig eingespannte Trennbauteil zwischen den beiden Räumen besteht aus Glas ( $E = 6,32 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu = 0,24$ ,  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$ ). Angeregt wird das System durch eine Schnelle  $v_n = 1 \text{ m/s}$  auf der Stirnseite des Senderraums. Alle übrigen freien Fluidoberflächen werden als schallhart angenommen. Die Berechnungen wurden für einen Frequenzbereich von 70 bis 200 Hz vorgenommen. In Abbildung 4.11 sind die Schalldruckpegel für den Sende- und den Empfangsraum über der Frequenz dargestellt. Die einzelnen Resonanzen können gezielt den drei Teilsystemen zugeordnet werden [122].

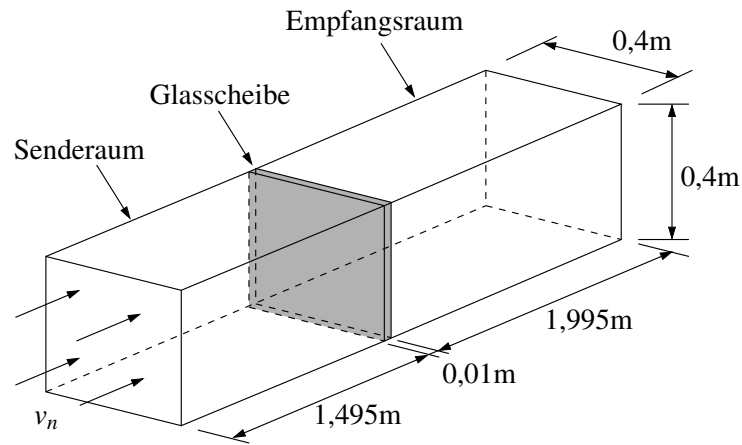


Abbildung 4.10: Beispiel zum Testen des Konvergenzverhaltens iterativer Löser

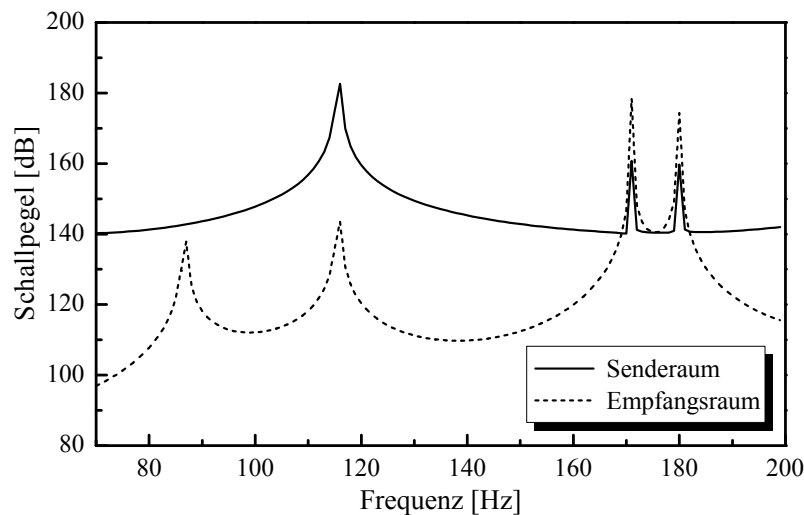


Abbildung 4.11: Schalldruckpegel über der Frequenz für den Sende- und den Empfangsraum aus Abbildung 4.10

Bei 115 Hz liegt der erste Eigenmode des Senderraums. Dem Empfangsraum können die Eigenfrequenzen bei 86,7 und 173,4 Hz zugeordnet werden. Diese Moden können nach Gleichung 6.1 bestimmt werden. Die erste Resonanz der eingespannten Rechteckplatte liegt bei 172,1 Hz.

In Abbildung 4.12 ist die Anzahl der Iterationen, die zum Lösen des Gleichungssystems benötigt werden, über der Frequenz abgetragen. Das Gleichungssystem wird jeweils mit einer ILU(0) vorkonditioniert, wobei der Präkonditionierer für jede Frequenz neu berechnet wird. Das Abbruchresiduum beträgt  $1,0 \cdot 10^{-6}$ . Der BiCGStab Löser benötigt über den gesamten Frequenzbereich im Mittel die meisten Iterationen, um die geforderte Genauigkeit zu erreichen. Für dieses Testbeispiel ist der BiCG Löser am besten geeignet. Er benötigt im Mittel rund 45 Iterationen, um für eine Frequenz die Lösung zu ermitteln. Ein verteiltes Bild ergibt sich für GMRES. Hier hängt die Konvergenz sehr stark von der Anzahl der verwendeten Basisvektoren bzw. dem gewählten Neustartparameter  $m$  ab. Dieser Neustartparameter beschränkt die Dimension des verwendeten



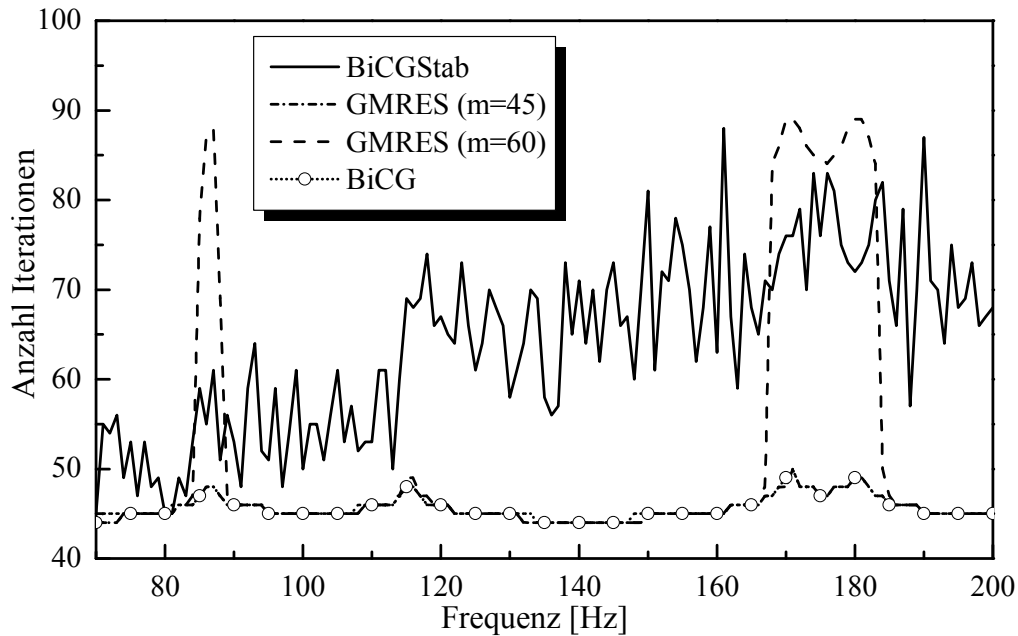


Abbildung 4.12: Vergleich der Anzahl der benötigten Iterationen zum Lösen eines Gleichungssystems für verschiedene iterative Gleichungslöser über der Frequenz

Krylov-Unterraumes. Wird dieser Parameter zu klein gewählt, ist die Konvergenz des Verfahrens schlecht. Wählt man den Neustartparameter hingegen zu groß, wird ggf. zu viel Arbeitsspeicher benötigt. Bei PETSc wird der Neustartparameter standardmäßig auf 30 gesetzt. Im Rahmen dieser Untersuchungen werden Neustartparameter  $m$  von 45 und 60 betrachtet. Für  $m = 45$  erkennt man, dass insbesondere im Bereich der Resonanzfrequenzen die Anzahl der benötigten Iterationen signifikant ansteigt (vgl. Abbildung 4.11). Wird der Neustartparameter jedoch auf  $m = 60$  erhöht, reduziert sich die Anzahl der benötigten Iterationen im Bereich der Resonanzen auf Werte unterhalb des Neustartparameters. Somit bleibt festzuhalten, dass für die hier untersuchten Probleme der Neustart des Verfahrens nach Möglichkeit unterbunden werden sollte, da ansonsten die Anzahl der zum Lösen des Gleichungssystems benötigten Iterationen deutlich erhöht wird.

## 5 Zweidimensionale Modellierung bauakustischer Probleme

In den folgenden Abschnitten soll eine Möglichkeit zur zweidimensionalen Modellierung bauakustischer Problemstellungen vorgestellt werden. Der Vorteil dieser Modellierung gegenüber dem dreidimensionalen Modell, das in den vorherigen Abschnitten vorgestellt wurde, liegt in der sehr stark reduzierten Rechenzeit und dem reduzierten Speicherbedarf. Dadurch wird es möglich, deutlich höhere Frequenzbereiche als mit der dreidimensionalen Formulierung zu untersuchen.

Analog zur schubweichen Platte wird zur Beschreibung der Struktur ein schubweicher Balken verwendet. Auch bei Finiten Elementen für schubweiche Balken, die auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen beruhen, können künstliche Versteifungseffekte auftreten. Daher wird auch für das verwendete Balkenelement eine Stabilisierung vorgestellt, die das Locking auf Elementebene eliminiert. Sowohl das akustische Fluid als auch die Kopplung zwischen dem Balken und den Fluid können analog zu Kapitel 4 formuliert werden.

### 5.1 Schubweicher Balken zur Modellierung elastischer Strukturen

Analog zur schubweichen Platte, die in Abschnitt 3.4.1 vorgestellt wird, wird für zweidimensionale Simulationen ein schubweicher Balken verwendet. Die folgenden Ausführungen orientieren sich an dem Element, das Knothe und Wessels in [116] vorstellen.

Auch schubweiche Balken, die mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen abgeleitet werden, unterliegen den künstlichen Versteifungseffekten wie sie in Abschnitt 4.2.1 beschrieben wurden. Das verwendete Element basiert auf einem Element mit kubischen Lagrangepolynomen, wobei die inneren Freiheitsgrade auf Elementebene kondensiert werden. Dadurch wird sichergestellt, dass das Element die Zustände der Starrkörperverschiebung, der konstanten Biegung sowie der Schubdeformation darstellen kann und die künstlichen Versteifungseffekte bereits auf Elementebene eliminiert werden. Durch die Kondensation wird das kubische Lagrangeelement mit acht Freiheitsgraden in ein statisch gleichwertiges Element mit vier Freiheitsgraden überführt. Es ergeben sich modifizierte Ansatzfunktionen, die neben der lokalen Balkenkoordinate  $\xi$  zusätzlich von einem Schubparameter  $\psi$ , der sich zu

$$\psi = \frac{1}{1 + 12 \frac{EI}{\ell^2 GA}} \quad (5.1)$$

ergibt, abhängen. Für einen Schubparameter  $\psi = 1$  ist der betrachtete Balken schubstarr. Die modifizierten Ansatzfunktionen gehen dann in die  $C^1$ -stetigen Hermite Polynome über, die zur Beschreibung der Durchbiegung eines Balkens nach der Theorie von Euler-Bernoulli verwendet werden.

Um auch in-plane Wellen und somit auch die Schallübertragung über flankierende Bauteile modellieren zu können, wird das Balkenelement mit einem Dehnstabelement überlagert. Die Elementmatrizen werden zunächst im lokalen  $\xi$ - $\eta$ -Koordinatensystem des Elements aufgestellt. Dieses Koordinatensystem ist gegenüber dem globalen Koordinatensystem um den Winkel  $\alpha$  verdreht (vgl. Abbildung 5.1). Matrizen im lokalen Koordinatensystem werden mit ' gekennzeichnet. Durch

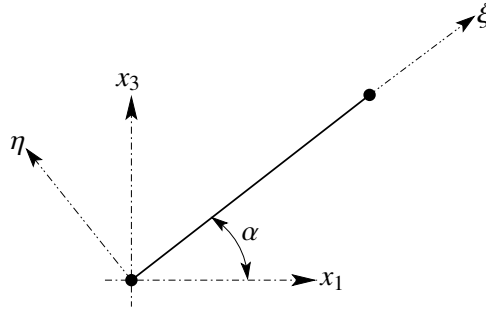


Abbildung 5.1: Koordinatensystem des Balkenelements

Multiplikation der lokalen Elementmatrizen mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ , die sich zu

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

ergibt, werden die Elementmatrizen- und vektoren in das globale Koordinatensystem transformiert:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}' \mathbf{T}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{T}^T \mathbf{M}' \mathbf{T}. \quad (5.3)$$

Somit ergibt sich im Frequenzbereich für das globale Koordinatensystem das Gleichungssystem

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (5.4)$$

wobei  $\mathbf{u} = [u_1^1 \ u_3^1 \ \varphi_2^1 \ u_1^2 \ u_3^2 \ \varphi_2^2]$  die gesuchten Verschiebungen sind. Da der elastische Körper nicht direkt zu Schwingungen angeregt wird, wird auf die explizite Angabe des Lastvektors verzichtet. Die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}'$  des mit einem Dehnstab überlagerten schubweichen Balkens ergibt sich durch Verwendung der modifizierten Ansatzfunktionen zu

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\psi EI}{\ell^3} & \frac{6\psi EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12\psi EI}{\ell^3} & \frac{6\psi EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6\psi EI}{\ell^2} & (1+3\psi)EI & 0 & -\frac{6\psi EI}{\ell^2} & -\frac{(1+3\psi)EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\psi EI}{\ell^3} & -\frac{6\psi EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12\psi EI}{\ell^3} & -\frac{6\psi EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6\psi EI}{\ell^2} & -\frac{(1+3\psi)EI}{\ell} & 0 & -\frac{6\psi EI}{\ell^2} & \frac{(1+3\psi)EI}{\ell} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Die Massenmatrix  $\mathbf{M}'$  kann in zwei Anteile zerlegt werden  $\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_A + \mathbf{M}'_I$ . Der Anteil  $\mathbf{M}'$  berechnet sich aus

$$\mathbf{M}'_A = \frac{\rho A \ell}{840} \begin{bmatrix} 280 & 0 & 0 & & \\ 0 & 280 + 28\psi + 4\psi^2 & -\ell(35 + 7\psi + 2\psi^2) & & \\ 0 & -\ell(35 + 7\psi + 2\psi^2) & \ell^2(7 + \psi^2) & & \\ 140 & 0 & 0 & & \\ 0 & 140 - 28\psi - 4\psi^2 & -\ell(35 - 7\psi - 2\psi^2) & & \\ 0 & \ell(35 - 7\psi - 2\psi^2) & -\ell^2(7 - \psi^2) & & \\ 140 & 0 & 0 & & \\ 0 & 140 - 28\psi - 4\psi^2 & \ell(35 - 7\psi - 2\psi^2) & & \\ 0 & -\ell(35 - 7\psi - 2\psi^2) & -\ell^2(7 - \psi^2) & & \\ \dots & 280 & 0 & 0 & \\ 0 & 280 + 28\psi + 4\psi^2 & \ell(35 + 7\psi + 2\psi^2) & & \\ 0 & \ell(35 + 7\psi + 2\psi^2) & \ell^2(7 + \psi^2) & & \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

und der Anteil  $\mathbf{M}'_I$  ergibt sich zu

$$\mathbf{M}'_I = \frac{\rho A \ell}{840} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 36\psi^2 & \ell(15\psi - 18\psi^2) & & \\ 0 & \ell(15\psi - 18\psi^2) & \ell^2(10 - 15\psi + 9\psi^2) & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -36\psi^2 & -\ell(15\psi - 18\psi^2) & & \\ 0 & \ell(15\psi - 18\psi^2) & \ell^2(5 - 15\psi + 9\psi^2) & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -36\psi^2 & \ell(15\psi - 18\psi^2) & & \\ 0 & -\ell(15\psi - 18\psi^2) & \ell^2(5 - 15\psi + 9\psi^2) & & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 36\psi^2 & -\ell(15\psi - 18\psi^2) & & \\ 0 & -\ell(15\psi - 18\psi^2) & \ell^2(10 - 15\psi + 9\psi^2) & & \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Alle diese Matrizen gehen für den schubstarren Fall, d.h.  $\psi = 1$ , in die entsprechenden Matrizen des schubstarren Balkens über.

## 5.2 Zweidimensionale Formulierung für das akustische Fluid

Die FE Formulierung für das akustische Formulierung ergibt sich analog zu Abschnitt 4.1. Die Kompressibilitätsmatrix  $K_{rs}^F$  ergibt sich zu

$$K_{rs}^F = t \int_A \nabla N_r \nabla N_s \, dA \quad (5.8)$$

und die Massenmatrix  $\mathbf{M}^F$  zu

$$M_{rs}^F = t \frac{1}{c^2} \int_A N_r N_s \, dA. \quad (5.9)$$

### 5.3 Kopplung zwischen Fluid und Struktur für den zweidimensionalen Fall

Die Kopplungsmatrix  $\mathbf{C}'$ , die die Wechselwirkungen zwischen akustischem Fluid und elastischer Struktur beschreibt, ergibt sich analog zu Abschnitt 4.3 durch Auswertung des Integrals (4.37). Sie lautet im lokalen  $\xi$ - $\eta$ -Koordinatensystem

$$\mathbf{C}' = \frac{\ell}{120} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 40 + 2\psi & 20 - 2\psi \\ \ell(5 + \psi) & \ell(5 - \psi) \\ 0 & 0 \\ 20 - 2\psi & 40 + 2\psi \\ -\ell(5 - \psi) & -\ell(5 + \psi) \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Diese Matrix ist analog zur Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix ebenfalls durch Multiplikation mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  in das globale Koordinatensystem zu transformieren. Da die Formfunktionen zur Diskretisierung der Durchbiegungen und Verdrehungen des Balkens den Schubparameter  $\psi$  enthalten, hängt auch die Kopplungsmatrix von diesem Faktor ab. Auch hier ergibt sich für den Fall  $\psi = 1$  die Kopplungsmatrix zwischen einem Euler-Bernoulli-Balken und einem akustischen Fluid.

### 5.4 Anwendungsbereich der zweidimensionalen Formulierung

Der Vorteil des zweidimensionalen Modells gegenüber dem dreidimensionalen Modell liegt im deutlich vergrößerten Frequenzbereich, der in der Simulation betrachtet werden kann, sowie in der signifikanten Reduzierung der Rechenzeit. Im Allgemeinen können dreidimensionale bauakustische Probleme nicht auf zweidimensionale Modelle reduziert werden. Zum Einen existieren eine Vielzahl von Eigenmoden in der dritten Raumrichtung des Fluids, zum Anderen ändert sich die modale Dichte mit größer werdender Frequenz für Platten und Balken sehr unterschiedlich. Sofern jedoch die Abmessungen, Randbedingungen, Materialeigenschaften der Struktur oder das durch die schwingende Struktur angeregte diffuse Schallfeld auch durch das zweidimensionale Modell beschrieben werden können, kann dieses einen guten qualitativen Einblick in das bauakustische Problem liefern. So finden sich in der Literatur eine Vielzahl von Modellen zur Beschreibung von Schalltransmissionsvorgängen, die auch auf dreidimensionale Fragestellungen angewendet wurden [69, 50].

## 6 Verifikationsbeispiele

Die in Kapitel 4 vorgestellten Formulierungen sollen in den folgenden Abschnitten anhand von Verifikationsbeispielen getestet werden. Dazu werden zunächst die FE Formulierungen für das akustische Fluid, die elastische Struktur und das poroelastische Kontinuum unabhängig voneinander betrachtet. Anhand weiterer Beispiele werden dann die vorgestellten Formulierungen zur Beschreibung der Interaktionen zwischen den einzelnen Teilgebieten überprüft. Im Rahmen der Untersuchung der Interaktion von finiten und infiniten Gebieten werden zudem die Konvergenzeigenschaften der Padé Approximation, die in Abschnitt 4.6.2.3 vorgestellt wurde, untersucht.

### 6.1 Eigenmoden eines Raumes

Die finiten Elemente für das Fluid werden anhand der Eigenfrequenzen eines Rechteckraumes mit schallharten Wänden verifiziert. Dazu werden die berechneten Eigenfrequenzen mit der exakten, analytischen Lösung verglichen. Unter Vernachlässigung der Luftabsorption lassen sich die Eigenfrequenzen eines rechteckigen Raumes mit den Kantenlängen  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$  als Lösungen der Helmholtz-Gleichung zu

$$\omega_{ijk} = c_f \pi \sqrt{\left(\frac{n_i}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_j}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_k}{l_3}\right)^2} \quad n_i, n_j, n_k = 0, 1, 2, 3... \quad (6.1)$$

bestimmen [91].

In Tabelle 6.1 sind die Ergebnisse für einen Raum mit den Abmessungen  $1\text{m} \times 1\text{m} \times 3\text{m}$  und einer Schallgeschwindigkeit von  $c_f = 346 \text{ m/s}$  zusammengestellt. Der Raum wurde jeweils mit  $3 \times 3 \times 9$  Hexaederelementen diskretisiert. Bei der Auflösung lokaler Wie zu erwarten ist, liefern

Method	$\omega_{001}$	$\omega_{002}$	$\omega_{003}$	$\omega_{101}$	$\omega_{102}$	$\omega_{004}$
analytisch	57,667	115,333	173,000	182,358	207,920	230,667
Hex8	57,960	117,689	180,971	190,026	215,872	249,506
Hex27	57,667	115,352	173,137	182,488	208,044	231,220

Tabelle 6.1: Eigenfrequenzen eines Rechteckraumes

die Hexaederelemente mit quadratischen Ansätzen (Hex27) für dieses grobe Netz deutlich bessere Ergebnisse als die Hexaederelemente mit linearen Ansätzen. Es ist jedoch zu bemerken, dass für die Bestimmung der Eigenmoden, selbst für äußerst komplexe Geometrien wie Fahrgastzellen von Kraftfahrzeugen, keine besonderen Anforderungen an die Güte des verwendeten Netzes zu stellen ist [103]. Effekte trifft diese Aussage jedoch nicht mehr zu.

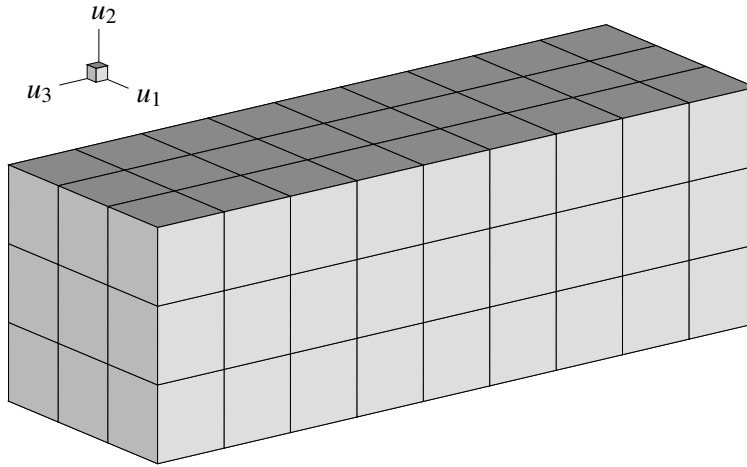


Abbildung 6.1: Diskretisierung des Verifikationsbeispiels zur Berechnung der Eigenmoden eines Raumes

## 6.2 Eigenfrequenzen einer quadratischen Platte

Im folgenden Abschnitt soll die in Kapitel 4.2 vorgestellte FE-Formulierung für die Mindlin-Platte an einem kleinen Testbeispiel überprüft werden. Dazu wird eine allseitig eingespannte, quadratische Platte betrachtet. Die Geometrie und die Materialparameter sind in Abbildung 6.2 gegeben. In [126] wird von Leissa eine analytische Lösung auf Basis der Kirchhoffschen Plattentheorie

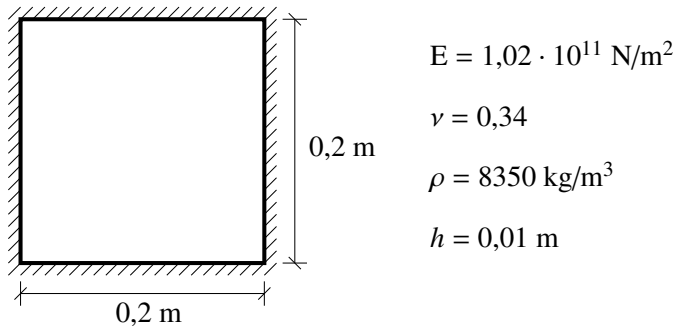


Abbildung 6.2: Allseitig eingespannte quadratische Platte

angegeben. Cheng hat die gleiche Konfiguration mit Hilfe einer Randelementformulierung für Mindlin-Platten untersucht [39] und Liew et al. haben ihre Ergebnisse mit Hilfe der pb-2 Rayleigh-Ritz Methode bestimmt, die auch auf eine Mindlin-Platte angewendet wurde.

Die in der Tabelle 6.2 zusammengestellten dimensionslosen Eigenfrequenzen ergeben sich nach

$$\bar{\omega} = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho h}{B}}. \quad (6.2)$$

Die berechneten Eigenfrequenzen zeigen gute Übereinstimmungen, insbesondere zu den anderen auf Grundlage der Mindlin-Theorie berechneten Ergebnissen. Bei den höheren Eigenfrequenzen sind jedoch gegenüber der Kirchhoff-Theorie deutliche Abweichungen festzustellen. Des Weiteren

Method	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
Leissa [126]	35,990	73,410	108,270	131,640
Cheng [39]	34,936	69,775	101,030	121,575
Liew [129]	34,968	69,827	101,065	121,623
FEM (16 × 16 DSG4)	35,104	70,862	102,274	125,939
FEM (32 × 32 DSG4)	34,972	69,984	101,167	122,417
FEM (8 × 8 DSG9)	34,941	69,798	100,970	121,951
FEM (16 × 16 DSG9)	34,931	69,703	100,815	121,319

Tabelle 6.2: Dimensionslose Eigenfrequenzen einer allseitig eingespannten, quadratischen Platte,  $\frac{h}{l} = 0.05$

sind die Ergebnisse der Diskretisierung mit DSG9 Elementen im Vergleich zur Diskretisierung mit DSG4 Elementen auf Grund der höheren Ansatzordnung deutlich besser.

### 6.3 Eigenfrequenzen eines eingespannten Kastens

Abschließend sollen zum Test der FE Implementierung der Strukturelemente die Eigenfrequenzen eines Kastens bestimmt werden, der am unteren Ende eingespannt und oben offen ist. Die berechneten Eigenfrequenzen werden mit den Ergebnissen verglichen, die von Kim et al. [112] berechnet wurden. Die Referenzergebnisse wurden mit Hilfe eines Rayleigh-Ritz-Verfahrens bestimmt. Die Wanddicke des in Abbildung 6.3 dargestellten Kastens beträgt 0,0015m, die übrigen

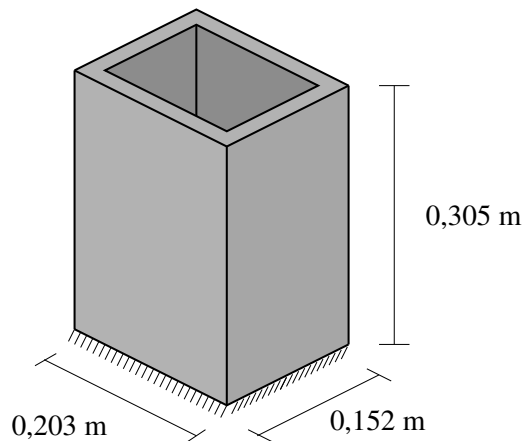


Abbildung 6.3: Eingespannter, oben offener Kasten

Materialparameter sind zu

$$E = 69,95 \text{ N/m}^2,$$

$$\nu = 0,32 \text{ und}$$

$$\rho = 2170 \text{ kg/m}^3$$

gegeben. In Tabelle 6.3 sind die ermittelten Eigenfrequenzen zusammengestellt. Bereits für ei-



Methode	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$	$\bar{\omega}_6$	$\bar{\omega}_7$
Kim, Dickinson	120,0	156,0	202,0	225,0	232,0	296,0	309,0
FEM (Quad4)	120,2	157,2	200,7	223,7	237,4	305,7	311,6
FEM (Quad4+ $\varphi_3$ )	120,2	157,3	200,1	223,4	237,3	305,6	311,0
FEM (Quad9)	118,4	154,4	199,3	221,6	229,8	292,8	305,2
MSC.Nastran	118,2	153,5	198,4	220,8	228,4	291,2	304,0

Tabelle 6.3: Eigenfrequenzen eines eingespannten, oben offenen Kastens in [Hz]

ne recht grobe Diskretisierung ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen, die Kim und Dickinson angeben. Analog zum Beispiel aus Abschnitt 6.2 sind die Eigenfrequenzen für die FE Lösung kleiner. Zur Bestimmung der größeren Eigenmoden reicht die Diskretisierung mit Quad4 Elementen offensichtlich nicht aus. Die Elemente mit höherer Ansatzordnung liefern Ergebnisse, die deutlich näher an der Lösung von Kim und Dickinson liegen. Der Vergleich mit der Lösung der kommerziellen Software MSC Nastran [182] zeigt ebenfalls eine gute Übereinstimmung.

Um den Einfluss der Formulierung zur Beschreibung der in-planen Schwingungen zu untersuchen, wurde ein Test mit einem Scheibenelement durchgeführt, dass den Freiheitsgrad  $\phi_3$  enthält [102]. Im Vergleich zum Quad4 Element mit frei gewählter Steifigkeit zeigen sich keine signifikanten Unterschiede in der Lösung, so dass im Folgenden der Ansatz nach Bathe verwendet wird (vgl. Abschnitt 4.2.4).

## 6.4 Kopplung von akustischem Fluid und elastischer Struktur

Die gekoppelte FE Formulierung wird anhand eines Beispiels, das von Guy eingehend untersucht wurde [84], verifiziert. Dazu wird das in Abbildung 6.4 dargestellte Wand-Raum-Wand-Raum Sy-

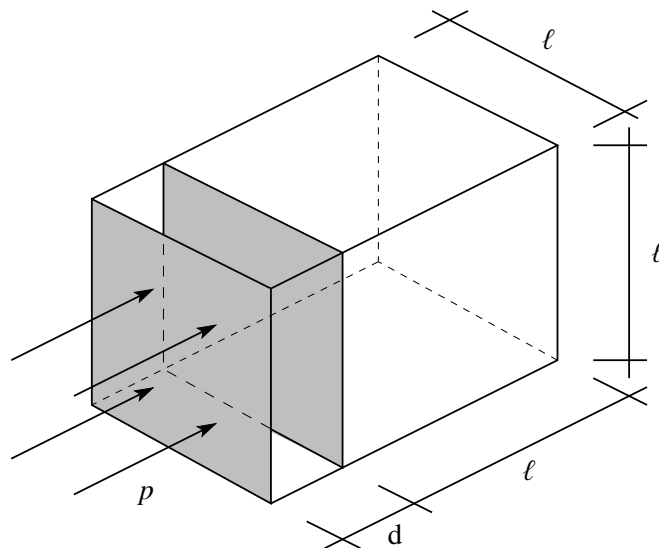


Abbildung 6.4: System zur Verifikation der Fluid-Struktur-Kopplung

stem betrachtet. Guy hat diese Problem sowohl messtechnisch als auch analytisch untersucht. Das vorgestellte analytische Modell basiert auf einem Modalansatz, mit dessen Hilfe sowohl das Verhalten der Messingplatten als auch der angrenzenden Räume beschrieben werden kann. Die Messingplatten ( $E = 104,0 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu = 0,37$ ,  $\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$ ,  $t = 0,0009144 \text{ m}$ ) sind an allen Rändern gelenkig gelagert. Die übrigen Begrenzungsflächen der Fluide werden als schallhart angenommen. Der Hohlraum hat eine Tiefe von  $d = 0,02 \text{ m}$ , die Kantenlänge  $\ell$  des Empfangsraumes beträgt  $0,2 \text{ m}$ . Die Anregung des Systems erfolgt durch eine gleichmäßig verteilte, konstante Flächenlast  $p$  auf der ersten Platte. Die analytische Lösung wird mit zwei Diskretisierungen verglichen. Bei der feinen Diskretisierung wird die Trennplatten jeweils mit  $7 \times 7$  Neun-Knoten-Elementen diskretisiert. Die Diskretisierung der Luft des Hohlraumes ( $c = 346 \text{ m/s}$ ,  $\rho_F = 1,21 \text{ kg/m}^3$ ) besteht aus  $7 \times 7 \times 4$  Hex27 Elementen, die des Empfangsraumes aus  $7 \times 7 \times 7$  Hex27 Elementen. Die grobe Diskretisierung besteht aus  $4 \times 4$  Neun-Knoten-Elementen für jede Trennplatte,  $4 \times 4 \times 3$  Hex27 Elementen für den Hohlraum sowie  $4 \times 4 \times 4$  Hex27 Elementen für den Empfangsraum. Die berechneten Ergebnisse sind in Abbildung 6.5 zusammengefasst. Bereits die grobe Diskretisierung stellt das prinzipielle

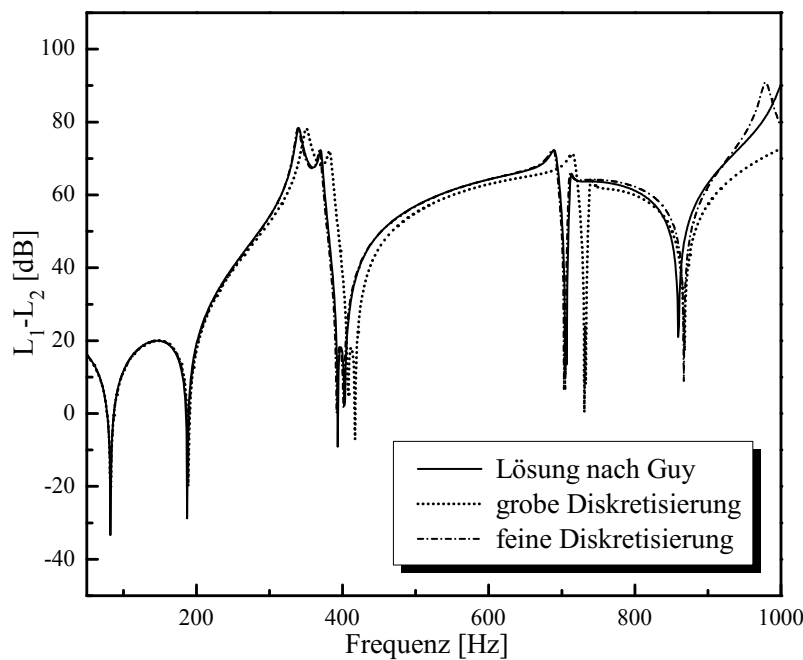


Abbildung 6.5: Schalldämm-Maß der Doppelplatte nach Abbildung 6.4. Vergleich von FE Simulation und analytischer Lösung nach Guy [84]

Schalldämmverhalten der Konstruktion dar. Mit zunehmender Frequenz nimmt jedoch die Übereinstimmung im Vergleich zur analytischen Lösung ab. Die feinere Diskretisierung stimmt nahezu über den gesamten Frequenzbereich mit der Lösung nach Guy überein. Die Resonanzen der einzelnen Teilgebiete lassen sich gut im Verlauf des Schalldämm-Maßes erkennen. Die Einbrüche bei etwa 82, 390 und 700 Hz entsprechen den Eigenfrequenzen der gelenkig gelagerten Messingplatten. Der Effekt der Masse-Feder-Masse Resonanz, der bereits in Abschnitt 2.1.1.2 beschrieben wurde, findet sich bei 186 Hz. Deutlich sind ebenfalls die doppelten Resonanzen zu erkennen, die durch die ähnlichen Eigenfrequenzen der einzelnen Platten und des Platte-Hohlraum-Platte Systems verursacht werden [84]. Bei einer Frequenz von etwa 850 Hz liegt die erste Resonanzfre-

quenz des Empfangsraumes, die auch zu einem Einbruch im Schalldämm-Maß führt. Insgesamt ist festzuhalten, dass die Einbrüche an den Resonanzfrequenzen sehr stark ausgeprägt sind. Teilweise ergeben sich sogar negative Werte für das Schalldämm-Maß. Dieses Phänomen wird auch als negative Schalldämmung bezeichnet [84] und wird durch Antiresonanzen hervorgerufen. Durch eine Erhöhung der Dämpfung, sowohl in der Struktur als auch im Fluid, würden diese ausgeprägten Einbrüche jedoch signifikant abgeschwächt und der Verlauf des Schalldämm-Maßes über der Frequenz geglättet.

## 6.5 Kopplung finiter und infiniter Gebiete

In Abbildung 6.6 ist das Verifikationsbeispiel dargestellt, an dem die Kopplung zwischen FE Gebiet und unendlichem Halbraum getestet werden soll. Ein rechteckiger, luftgefüllter Raum ( $c=346$

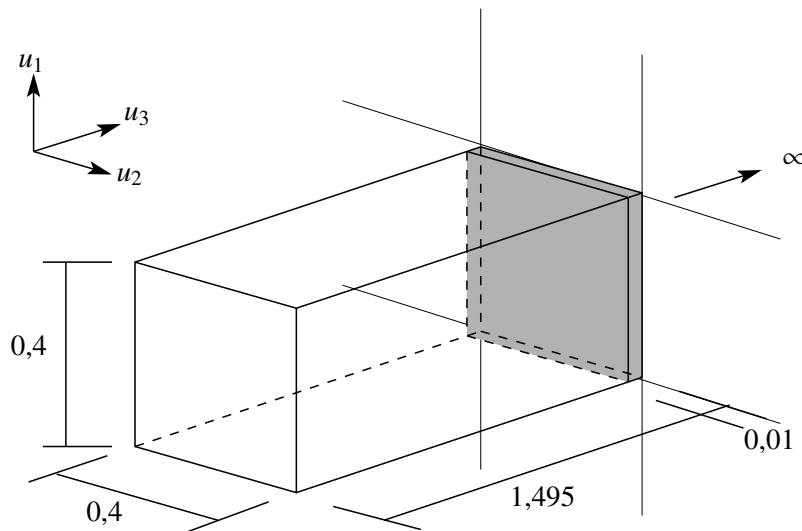


Abbildung 6.6: System, Abmessungen in [m]

m/s,  $\rho_F=1,21 \text{ kg/m}^3$ ), der an der Stirnseite mit einer Schnelle  $v_n$  von 1 m/s angeregt wird, ist mit einer Glasplatte ( $E=6,32 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu=0,24$ ,  $\rho=2300 \text{ kg/m}^3$ ,  $h=0,01 \text{ m}$ ) gekoppelt. Die übrigen Flächen des Raumes werden als schallhart angenommen. An die Platte grenzt an der gegenüberliegenden Seite ein Halbraum an, der ebenfalls aus Luft besteht. Dieses Beispiel wurde von Langer mit Hilfe einer gekoppelten FE-BE-Formulierung untersucht [122]. In Abbildung 6.7 ist die verwendete Diskretisierung schematisch dargestellt. Der rechteckige Raum wird mit Acht-Knoten-Hexaederelementen diskretisiert. Daran grenzen unmittelbar Vier-Knoten-Plattenelemente an. Im Gegensatz zu [122], wo Elemente auf Basis der Kirchhoffschen Plattentheorie verwendet wurden, werden hier Mindlinelemente verwendet, die mit Hilfe des DSG Ansatzes stabilisiert sind. Im Außenraum sind ebenfalls Hexaederelemente für die Diskretisierung des Halbraumes nötig, da ansonsten die Eindeutigkeit der Koordinatentransformation, auf der die SBFEM beruht, nicht gewährleistet werden kann. In Abbildung 6.8 ist die tatsächlich verwendete Diskretisierung dargestellt. Das abgeschlossene Fluidgebiet wird mit  $5 \times 5 \times 14$  Hex8-Elementen diskretisiert. Der Halbraum besteht aus  $9 \times 9 \times 2$  Hex8-Elementen, an die 153 SBFEM Elemente angrenzen. In Abbildung 6.9 sind die Schalldruckpegel für das gekoppelte FEM-SBFEM sowie das FEM-

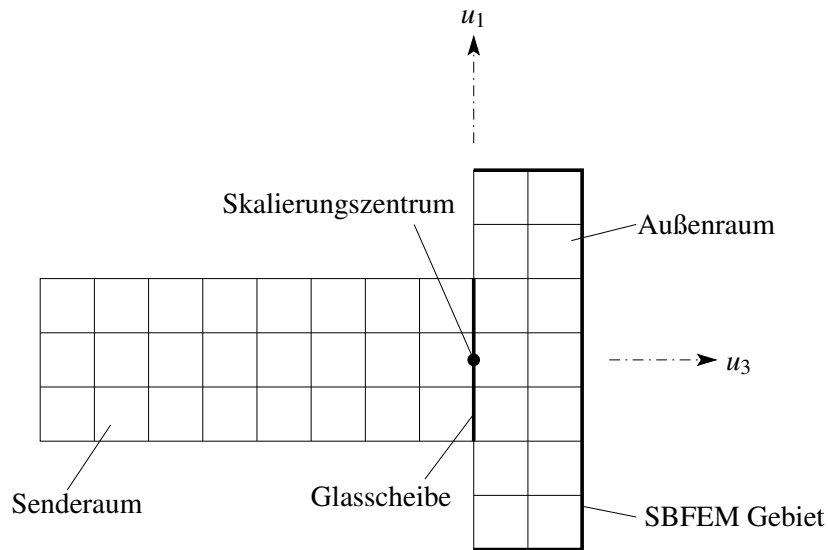


Abbildung 6.7: Schematische Seitenansicht der verwendeten Diskretisierung

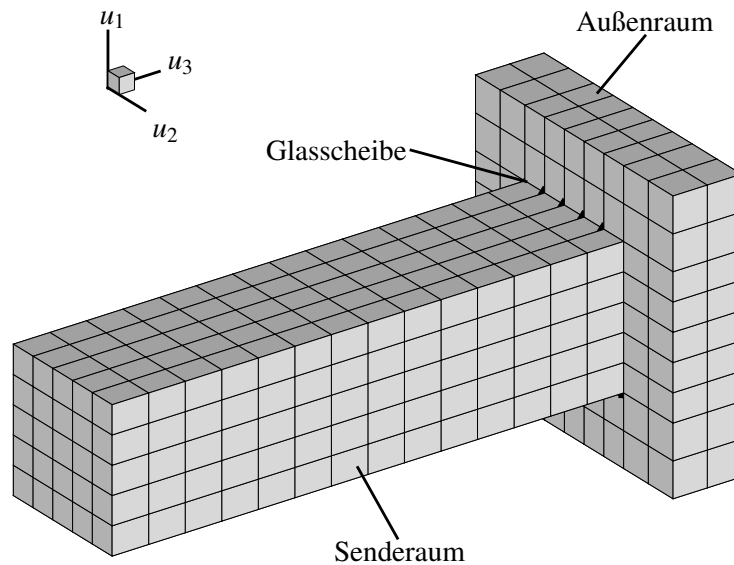


Abbildung 6.8: Diskretisierung SBFEM

REM Modell über der Frequenz dargestellt. Die Berechnungen wurden für einen Frequenzbereich von 70 bis 200 Hz durchgeführt. Der Schalldruckpegel des Senderraums wurde durch Mittelung des Schalldrucks über sämtliche Knoten der Fluiddiskretisierung bestimmt. Für die Bestimmung des Schallpegels im Außenraum wurden die Knoten an der Schnittstelle von Glasplatte und Luft berücksichtigt. Zwischen den Ergebnissen der beiden Verfahren gibt es keine signifikanten Abweichung. Lediglich die Lage der zweiten Eigenfrequenz des gekoppelten Systems, die der Platte zuzuordnen ist, sind leicht gegeneinander verschoben, wobei die Eigenfrequenz der FE-REM Rechnung leicht größer ist.

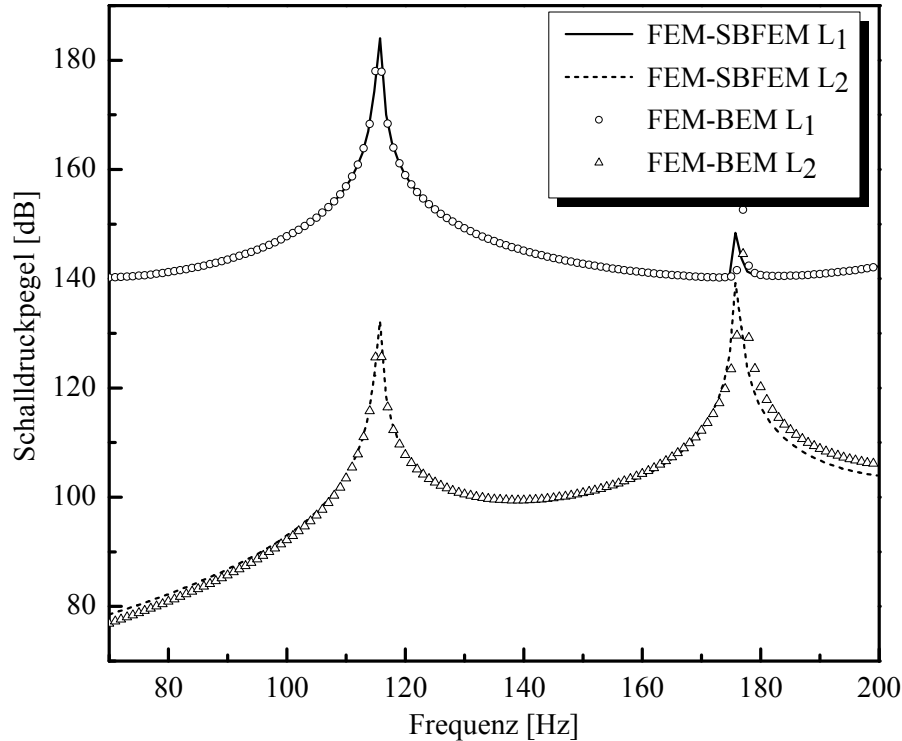


Abbildung 6.9: Vergleich der Schalldruckpegel im Senderraum und an der Plattenoberfläche auf der Außenseite des Gebiets für die gekoppelte FEM-REM Simulation bzw. die gekoppelte FEM-SBFEM Simulation

## 6.6 Untersuchung der Konvergenz der Padé Approximation

Im folgenden Abschnitt soll die Konvergenz der Padé Approximation, die für die Berechnung der dynamischen Steifigkeitsmatrizen  $S^\infty(\omega)$  verwendet wird, untersucht werden. Song und Bayzar haben für elastodynamische Probleme derartige Untersuchungen bereits durchgeführt [173]. Allerdings beschränken sich die Probleme auf eine sehr geringe Zahl von Freiheitsgraden sowie zweidimensionale Gebiete, so dass nur bedingt Aussagen über die Verwendbarkeit der Formulierung für Fragestellungen mit einer signifikant größeren Anzahl von Freiheitsgraden gemacht werden können.

In Abbildung 6.10 ist die CPU Zeit, die für die Berechnung der Padé Approximation benötigt wird, über der Ordnung  $M$  der Reihe dargestellt. Wie in Abbildung 6.10 zu erkennen ist, steigt die benötigte CPU Zeit quadratisch mit der Ordnung  $M$  der Padé Reihe an.

Das untersuchte dreidimensionale Problem wurde in Abschnitt 6.4 vorgestellt. Dort wurde die Lösung der FEM-SBFEM Simulation mit der FEM-REM Berechnung verglichen. Die CPU Zeit, die für die Berechnung der Approximation der dynamischen Steifigkeitsmatrix für verschiedene Ordnungen  $M$  der Padé Reihe benötigt wird, ist in Abbildung 6.11 über der Frequenz dargestellt. Ebenso wie für das zweidimensionale Testbeispiel nimmt die benötigte CPU Zeit quadratisch mit der Ordnung  $M$  der Padé Reihe zu. Somit ist es für die Effizienz des Verfahrens wichtig, dass die Approximation bereits für kleine Ordnungen  $M$  gegen die endgültige Lösung konvergiert.

In Abbildung 6.12 ist der Schalldruckpegel im Empfangsraum über der Frequenz für verschiedene

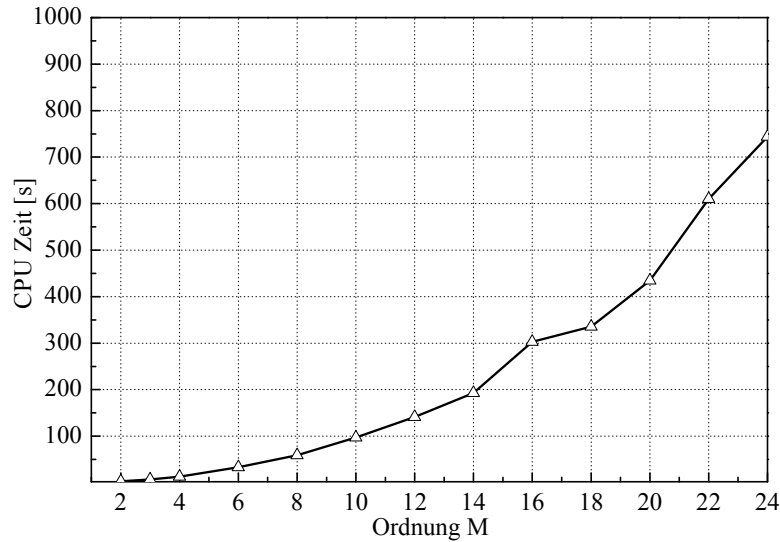


Abbildung 6.10: Benötigte CPU Zeit für die Berechnung der approximierten dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}^\infty(\omega)$  mit Hilfe der Padé Approximation für das zweidimensionale Testbeispiel

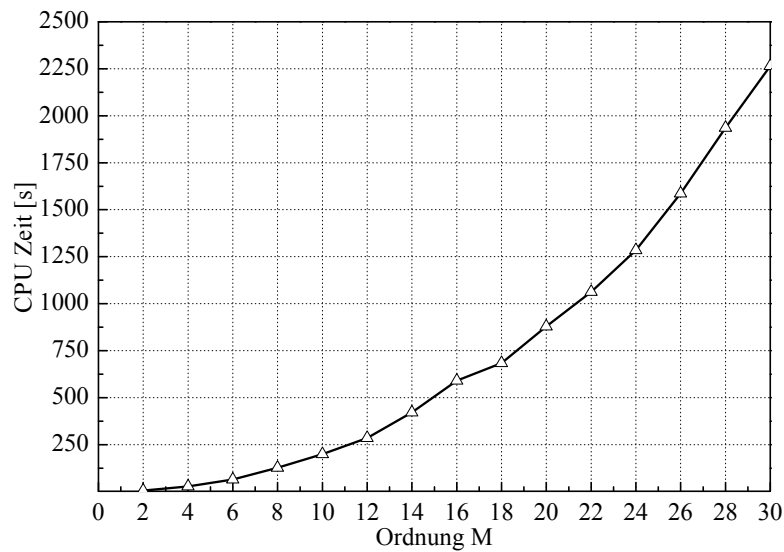


Abbildung 6.11: Benötigte CPU Zeit für die Berechnung der approximierten dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}^\infty(\omega)$  mit Hilfe der Padé Approximation für das dreidimensionale Testbeispiel

Ordnungen  $M$  abgebildet. Wie anhand der Abbildung zu erkennen ist, konvergiert die Lösung mit zunehmender Ordnung  $M$  der Padé Reihe schnell gegen die endgültige Lösung. Bereits für  $M = 6$  ergibt sich diese Lösung. Die Abweichung für die Ordnung  $M = 4$  im Vergleich zur Ordnung  $M = 6$  beträgt lediglich 0,2 dB.

Damit bestätigt sich die bereits vermutete gute Konvergenz der Padé Approximation, die auch von Song beobachtet wurde [173]. Die benötigte CPU Zeit zur Berechnung der Approximation

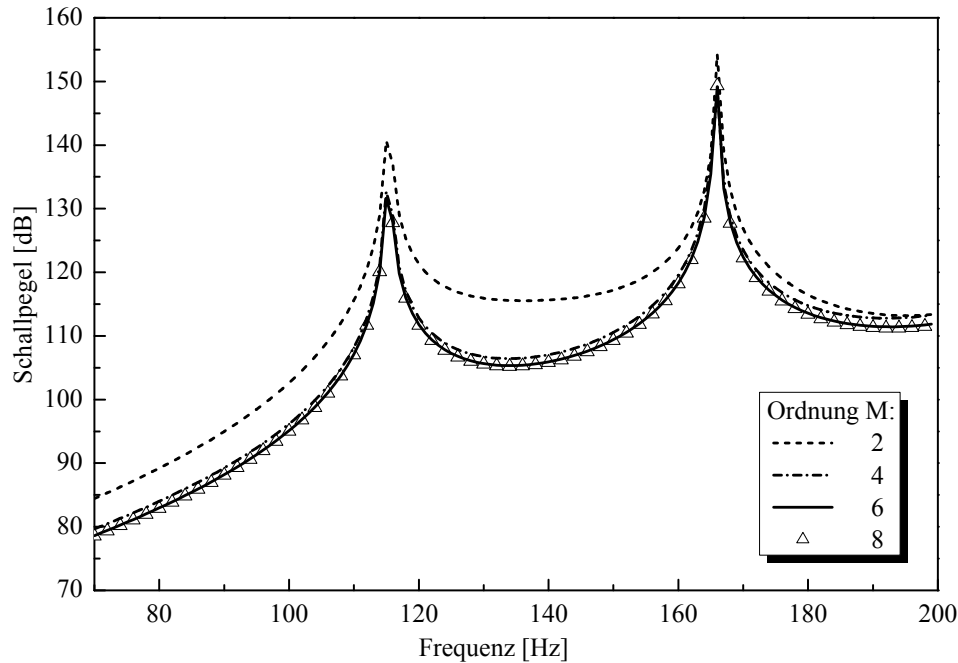


Abbildung 6.12: Schalldruckpegel im Empfangsraum über der Frequenz für das dreidimensionale Testbeispiel in Abhängigkeit von der Ordnung  $M$  der Padé Approximation

nimmt mit zunehmender Ordnung  $M$  sehr stark zu. Allerdings ist für die Konvergenz der hier untersuchten Beispiele nur eine kleine Ordnung  $M$  nötig, so dass das Verfahren für die Untersuchung von bauakustischen Problemen geeignet ist. Insbesondere im Vergleich zur Lösung, die mit Hilfe der asymptotischen Erweiterung bestimmt wurde, konvergiert sie schnell gegen die endgültige Lösung.

## 6.7 Impedanz an der Oberfläche einer infiniten Schicht porösen Materials

Die in Abschnitt 4.4 vorgestellte (u,p)-Formulierung zur Beschreibung poroelastischer Medien soll im folgenden Abschnitt verifiziert werden. Dazu wird eine unendlich ausgedehnte Schicht, die aus einem poroelastischen Material besteht, betrachtet. Die Dicke der Schicht, deren Geometrie in Abbildung 6.13 dargestellt ist, beträgt 10 cm. Angeregt wird das System durch eine einlaufende ebene Welle, deren Amplitude Eins beträgt. In der hier verwendeten (u,p)-Formulierung entspricht diese einlaufende Welle einer Dirichletrandbedingung für den Druck  $p$  [56]. Der Einfluss der ebenen Schallwelle auf das Korngerüst kann aufgrund der sehr hohen Porosität  $\phi$  vernachlässigt werden. Die Materialkenngrößen des porösen Mediums sind in Tabelle 6.4 zusammengestellt. Die Parameter dieses Materials entsprechen Glaswolle. Aufgrund der sehr hohen Porosität des betrachteten Materials kann die Querkontraktion vernachlässigt werden, d.h.  $\nu = 0$ . Die unendliche Ausdehnung der Schicht wird durch entsprechende Verschiebungsrandbedingungen sichergestellt. Untersucht wird der Frequenzbereich von 400 bis 800 Hz. Für diesen Bereich wird die Impedanz

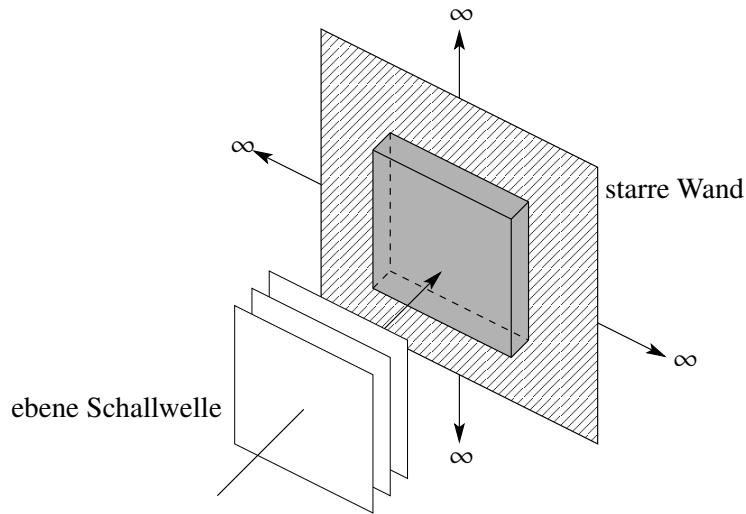


Abbildung 6.13: Geometrie der unendlich ausgedehnten Schicht aus porösem Material, die durch eine einlaufende ebene Schallwelle angeregt wird

Parameter	Wert
$\phi$	0,96
$\rho_S$	2140 kg/m <sup>3</sup>
$\rho_F$	1,2 kg/m <sup>3</sup>
$E$	44 · 10 <sup>5</sup> N/m <sup>2</sup>
$\eta$	0,1
$\nu$	0
$\alpha$	1
$\alpha_\infty$	1,06
$R$	4 · 10 <sup>4</sup> Ns/m <sup>4</sup>
$\lambda_v$	56 · 10 <sup>-6</sup> m
$\lambda_t$	110 · 10 <sup>-6</sup> m

Tabelle 6.4: Materialeigenschaften der 10cm dicken Schicht aus porösem Material (Glaswolle)

an der Oberfläche der poroelastischen Schicht bestimmt und mit einer analytischen Lösung, die von Allard in [3] angegeben wird, verglichen.

Die Impedanz an der Oberfläche ergibt sich aus den Verschiebungen  $u_n$  des Korngerüsts sowie den Verschiebungen  $U_n$  des Fluids zu

$$Z_n = \frac{1}{i\omega(\phi U_n + (1 - \phi)u_n)}. \quad (6.3)$$

Im ebenfalls implementierten (u,U)-Modell nach Panneton und Atalla [148] sind die Verschiebungen des Fluids explizit im Modell enthalten. Der Nachteil dieser Formulierung gegenüber der hier verwendeten (u,p)-Formulierung liegt in der signifikant erhöhten Anzahl der Unbekannten. Im (u,U)-Modell existieren an jedem Knoten je drei Verschiebungen für das Korngerüst und drei Verschiebungen für das Fluid. Für die (u,p)-Formulierung reduziert sich die Anzahl auf vier Unbekannte je Knoten. Allerdings müssen für dieses Modell die Verschiebungen  $\mathbf{U}$  des Fluids in einer



Nachlaufrechnung durch Auswertung von Gleichung (3.79) bestimmt werden. In dieser Gleichung ist der Gradient des Fluiddrucks  $p$  zu ermitteln, der an den Gauß-Punkten der Integration berechnet wird und danach auf die Knoten extrapoliert wird. Die Genauigkeit dieser Berechnung hängt sehr stark von der Wahl des FE Netzes ab. So verliert für diese Anwendung die Überschlagregel, dass sechs Elemente je Wellenlänge zur Diskretisierung ausreichen, ihre Gültigkeit. Vielmehr ist an der Oberfläche, an der die Impedanz bestimmt werden soll, ein sehr dünnes Element zu erstellen, um den Gradienten hinreichend genau bestimmen zu können. Die Konvergenzeigenschaften der (u,p)-Formulierung wurden von Dauchez et al. eingehend untersucht [52]. Dort wird festgestellt, dass eine lokale Netzverfeinerung entlang der belasteten Oberfläche die Güte der Lösung stark verbessert. In Abbildung 6.14 ist die Diskretisierung dargestellt, die für das (u,p)-Modell verwendet wurde. Sie besteht aus 8 Hexaederelementen mit 8 Knoten. Für die Berechnungen, die

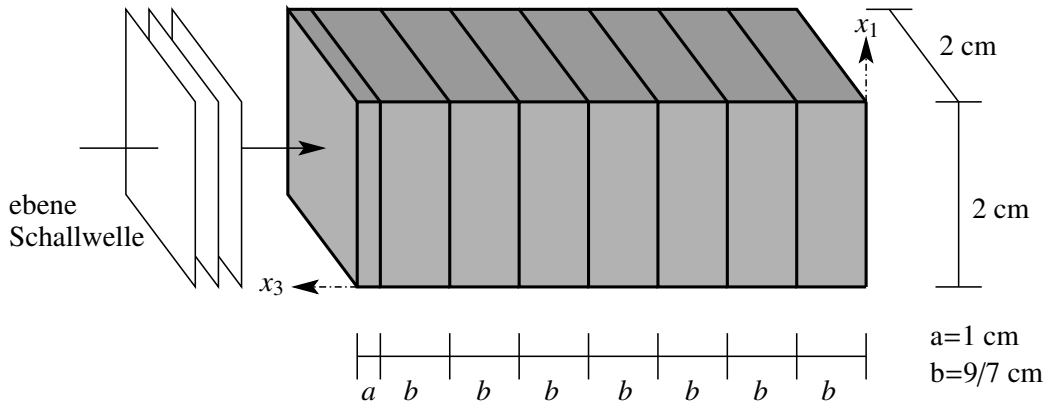


Abbildung 6.14: Verwendete Diskretisierung zur Bestimmung der Impedanz an der Oberfläche der Schicht aus Glaswolle.

mit dem (u,U)-Modell durchgeführt werden, wird zur Vereinfachung das gleiche Netz verwendet, obwohl ein Netz mit gleichgroßen Elementen ausreichend wäre.

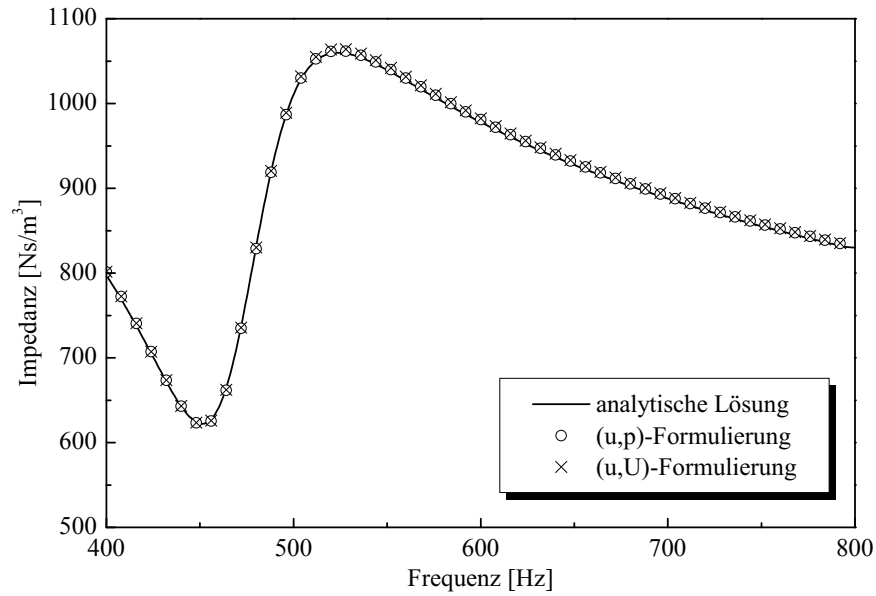
In Abbildung 6.15 werden die ermittelten Impedanzen für das analytische Modell, die (u,U)-Formulierung sowie die (u,p)-Formulierung miteinander verglichen, wobei nur die konvergierten Ergebnisse der FE-Formulierungen dargestellt sind. Für beide FE-Formulierungen zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Der Vorteil der (u,p)-Formulierung gegenüber der (u,U)-Formulierung oder der (u,w)-Formulierung, wobei die Relativverschiebung  $\mathbf{w}$  der Fluidpartikel als

$$\mathbf{w} = \phi (\mathbf{U} - \mathbf{u}) \quad (6.4)$$

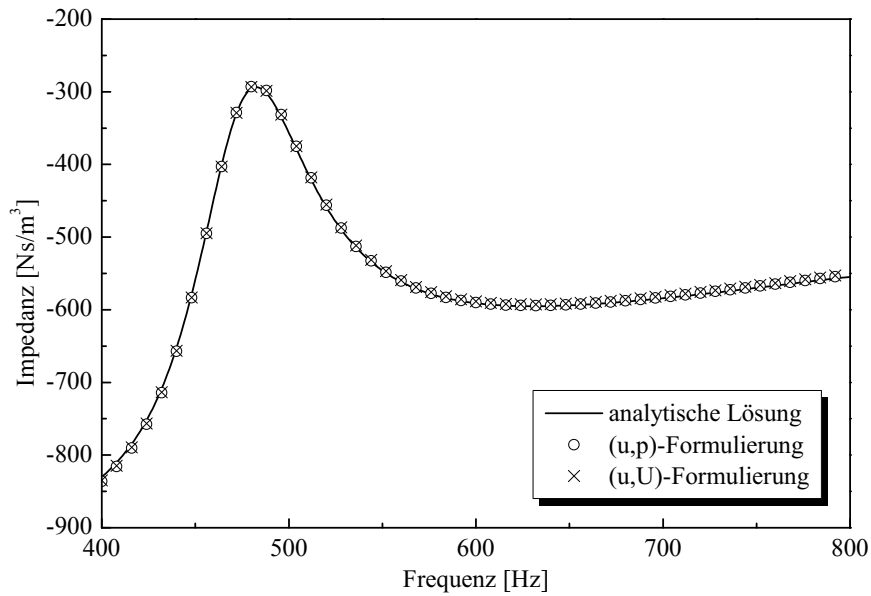
definiert ist, liegt in der signifikanten Reduktion der Unbekannten je Knoten sowie der vereinfachten Kopplungen der poroelastischen Struktur mit dem akustischen Fluid aus Abschnitt 4.1. Allerdings sind bei der Diskretisierung die in [52] beschriebenen Besonderheiten zu berücksichtigen.

## 6.8 Raum mit einer von porösem Material bedeckten Seitenwand

Ein allseitig abgeschlossener Raum ( $c_F=343$  m/s,  $\rho_F=1,21$  kg/m<sup>3</sup>), in dem eine Wand mit einer 5 cm dicken Schicht aus porösem Material bedeckt ist, wird zur Verifikation der Kopplung von



(a) Realteil der Impedanz



(b) Imaginärteil der Impedanz

Abbildung 6.15: Vergleich der Impedanz an der Oberfläche zwischen dem analytischen Modell [3] und zwei FE Modellen für eine unendlich ausgedehnte 10cm dicke Schicht Glaswolle

akustischem Fluid und poroelastischer Struktur untersucht. Die Abmessungen des Systems, das von Kang [109] und Davidsson [54] betrachtet wurde, sind in Abbildung 6.16 schematisch dargestellt. Für dieses System soll der über den Raum gemittelte Schalldruckpegel bestimmt werden,

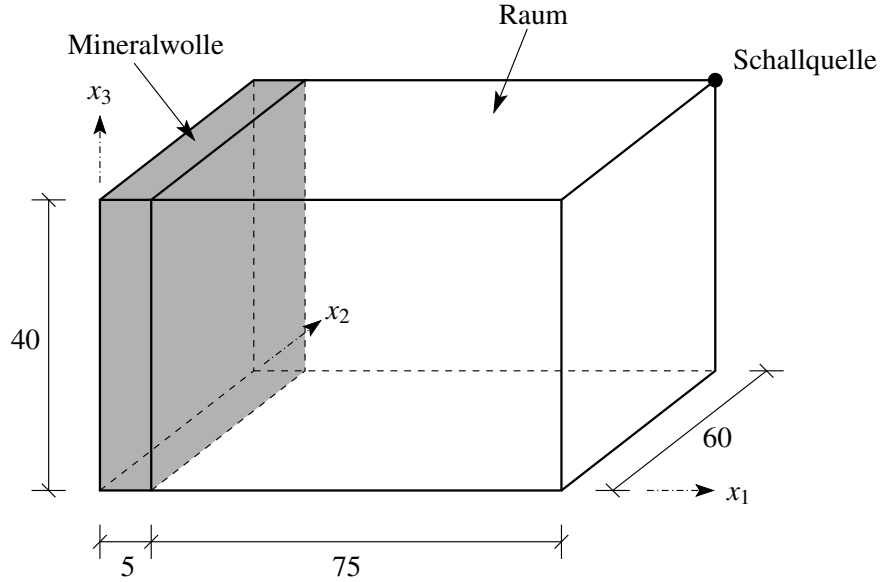


Abbildung 6.16: Abgeschlossenes Fluidgebiet. Alle Abmessung in [cm].

wobei das poröse Material entweder als äquivalentes Fluid oder als poroelastisches Kontinuum beschrieben wird. Die Modellierung des poroelastischen Kontinuums basiert auf der in Abschnitt 4.4 vorgestellten (u,p)-Formulierung.

Die Materialparameter des porösen Materials sind in Tabelle 6.5 zusammengestellt. Die übrigen

Parameter	Wert
$\phi$	0,96
$\rho_S$	540 kg/m <sup>3</sup>
$\rho_F$	1,2 kg/m <sup>3</sup>
$E$	$42 \cdot 10^3$ N/m <sup>2</sup>
$\eta$	0,05
$\nu$	0
$\alpha$	1
$\alpha_\infty$	1,4
$R$	$25 \cdot 10^3$ Ns/m <sup>4</sup>
$\lambda_v$	$93,2 \cdot 10^{-6}$ m
$\lambda_t$	$93,2 \cdot 10^{-6}$ m

Tabelle 6.5: Materialeigenschaften der 5cm dicken Schicht aus porösem Material (Mineralwolle)

fünf Begrenzungsflächen des Raumes werden als schallhart angenommen. Der Raum wird mit  $16 \times 12 \times 8$  Hexaedern mit je 8 Knoten diskretisiert. Für das poröse Material werden  $4 \times 12 \times 8$  Hexaeder mit ebenfalls je 8 Knoten verwendet. Als Anregung dient eine Schallquelle in einer Ecke des Raumes. Der betrachtete Frequenzbereich liegt zwischen 100 und 650 Hz.

In Abbildung 6.17 ist der über den Raum gemittelte Schalldruckpegel dargestellt. Es ist zu erken-

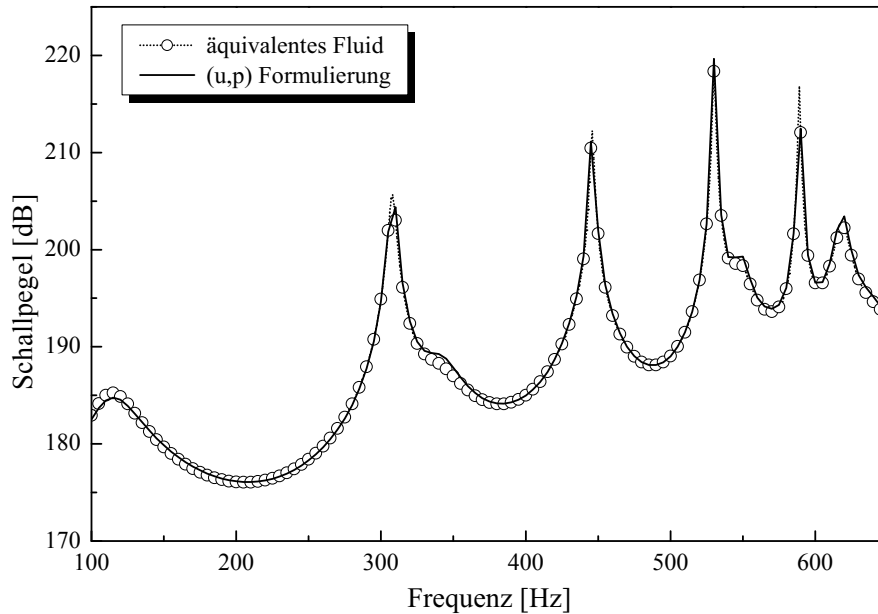


Abbildung 6.17: Über den Raum gemittelter Schalldruckpegel für zwei unterschiedliche Modelle zur Beschreibung des porösen Materials

nen, dass sich für dieses Beispiel kein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Formulierungen feststellen lässt. Nur bei den sehr stark bedämpften Eigenmoden bei etwa 340 und 550 Hz sind leichte Unterschiede zwischen den beiden Modellen festzustellen, die jedoch nur etwa 1 dB betragen. Dieses Verhalten ist zu erwarten, da das poröse Material als absorbierende Randbedingung wirkt und somit der Einfluss der Steifigkeit des Korngerüsts auf die Lösung verhältnismäßig gering ist. Entscheidend sind die Verluste innerhalb des Fluids, die jedoch in beiden Modellen über die gleichen Mechanismen beschrieben werden. Für besonders weiche Schäume ergeben sich größere Unterschiede im Bereich der einzelnen Resonanzfrequenzen [54].

## 7 Anwendungsbeispiele

Im folgenden Abschnitt wird das in den vorherigen Kapiteln vorgestellte Berechnungsmodell zur Simulation praxisrelevanter Fragestellungen verwendet. Dabei sollen die bauakustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen untersucht werden. Insbesondere steht hierbei die Ermittlung der Schalldämmung sowie der Längsdämmung im Vordergrund.

Dazu werden zwei unterschiedliche Systeme analysiert, die von der Physikalisch Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig messtechnisch untersucht wurden. Diese Messungen wurden an Modellprüfständen durchgeführt, deren Aufbau in Abschnitt 7.1 vorgestellt wird. Um die Übertragbarkeit der an diesen Modellprüfständen ermittelten Kenngrößen auf reale Konstruktionen zu gewährleisten, sind zudem einige Kriterien bezüglich der Skalierung zu beachten. Diese Kriterien werden ebenfalls in Abschnitt 7.1 diskutiert.

Eine mögliche Form der Dämpfung, die sowohl das Schalldämm-Maß als auch das Schall-Längsdämm-Maß beeinflussen könnte, ist die Dämpfung des akustischen Fluids. Dieser Einfluss der Fluiddämpfung, der mittels des in Abschnitt 3.6.1 beschriebenen Modells in der Simulation berücksichtigt wird, soll in Abschnitt 7.2 untersucht werden. Dazu werden zwei der in Abschnitt 7.1 vorgestellten Konfigurationen betrachtet, die in den folgenden Abschnitten zur Untersuchung der Schalldämmung sowie der Längsdämmung von Bauteilen verwendet werden.

Auf zweischalige Konstruktionen mit in den Hohlraum eingebrachtem schallabsorbierenden Materialien wird in Abschnitt 7.3 eingegangen. Dabei werden die in Abschnitt 4.4 vorgestellten Modelle miteinander verglichen. Im vierten Abschnitt dieses Kapitels wird die Schalldämmung einer Trennwand analysiert. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Untersuchung des Einflusses flankierender Bauteile sowie des Einflusses einer gedämpften Anbindung des Trennbauteils an die flankierenden Wände, die im realen Prüfstand durch Einbau einer umlaufenden Silikonfuge zwischen Trennbauteil und flankierenden Bauteilen hergestellt wurde.

Ob die Ermittlung der Längsdämmung in normalen Wandprüfständen möglich ist, wird in Abschnitt 7.5 untersucht. Viele Prüflabore messen die Längsdämmung von flankierenden Bauteilen, indem sie das Prüfobjekt seitlich parallel zur Außenwand in einen normalen Wandprüfstand einbauen. Dadurch entsteht ein schmales Luftvolumen, dessen Einfluss auf die zu erwartende Längsdämmung untersucht wird.

### 7.1 Modellmesstechnik

Um grundlegende bauakustische Untersuchungen durchzuführen, ist es zunächst wesentlich günstiger, sich auf die Betrachtung maßstabsgetreuer Modelle von Prüfständen zu beschränken. Im Gegensatz zu realen Prüfständen können im Modellprüfstand nahezu ideale Bedingungen geschaffen werden, die die Möglichkeit eröffnen, einzelne Dämpfungsmechanismen oder andere physikali-

sche Phänomene gezielt zu untersuchen und aus dem Gesamtsystem zu separieren. Des Weiteren können verschiedene Trennwände sowie unterschiedliche Anbindungen der Trennwände an die flankierenden Bauteile schneller und weniger aufwändig als im realen Prüfstand realisiert werden. Die in realen Prüfständen verwendeten Materialien sind zudem äußerst komplex, da sie häufig inhomogen sowie orthotrop oder anisotrop sind. Sie in einem numerischen Modell zu hinreichend genau zu beschreiben ist oft nicht ohne weiteres möglich.

Daher werden die Untersuchungen, die in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden, an Modellen realer bauakustischer Prüfstände durchgeführt. Dazu ist zunächst ein derartiger Modellprüfstand zu entwerfen und anhand verschiedener Messungen zu verifizieren, ob dieser Modellprüfstand in der Lage ist, die physikalischen Eigenschaften eines realen Prüfstandes abzubilden. Diese Aufgaben wurden von der Physikalisch Technischen Bundesanstalt durchgeführt. Die dabei erzielten Erkenntnisse wurden von Kling [114] und Wittstock [200] vorgestellt. Im Gegensatz zu den ebendort vorgestellten Messungen sollen mit Hilfe der im Rahmen dieser Arbeit durchzuführenden FE Simulationen die zum Teil messtechnisch nicht erfassbaren Phänomene sowohl getrennt voneinander als auch miteinander kombiniert untersucht werden.

Mit Hilfe der Ähnlichkeitstheorie soll nun zunächst die Modellskalierung hergeleitet werden. Danach wird der Aufbau der Modellsysteme, die in den folgenden Abschnitten detailliert untersucht werden, beschrieben.

### 7.1.1 Ähnlichkeitstheorie

Um die Erkenntnisse, die am Modell gewonnen wurden, auf einen realen Prüfstand übertragen zu können, ist das Modell nach den Ähnlichkeitsgesetzen zu skalieren. Dabei sind sowohl das Luft- als auch das Körperschallfeld zu berücksichtigen. Im Folgenden kennzeichnet der Index  $O$  den Originalmaßstab und der Index  $M$  den Modellmaßstab.

Bei der Schallausbreitung in Fluiden muss die Helmholtzzahl für den skalierten und den unskalierten Prüfstand übereinstimmen, da das Fluid in beiden Fällen Luft ist. Die Helmholtzzahl  $He$  ist als das Produkt aus Wellenzahl  $k$  und einer charakteristischen Länge  $L$  definiert

$$He = k \cdot L = \frac{L}{\lambda}. \quad (7.1)$$

Verwendet man nun noch die Wellengeschwindigkeit  $c = \lambda f$  und berücksichtigt, dass sich auch diese Wellengeschwindigkeit in beiden Skalen nicht unterscheidet, so ergibt sich letztendlich

$$f_M = \frac{L_O}{L_M} f_O = n \cdot f_O. \quad (7.2)$$

Die Frequenz  $f$  des Luftschalls ist somit für einen Maßstab 1:10 mit  $n = 10$  zu skalieren.

Für die Beschreibung von Körperschallfeldern ist sicher zu stellen, dass die Wellengeschwindigkeiten in beiden Systemen gleich sind

$$c_O = c_M. \quad (7.3)$$

Bei dispersionsfreien Quasilongitudinalwellen mit

$$\frac{E_O}{\rho_O(1 - \nu_O^2)} = \frac{E_M}{\rho_M(1 - \nu_M^2)} \quad (7.4)$$

muss das Verhältnis von Elastizitätsmodul und Dichte des gewählten Materials gleich groß sein. Der Einfluss der Querkontraktionszahl, die ohnehin in einem eng begrenzten Bereich liegt, ist

vernachlässigbar, da sie nur über den Faktor  $1 - \nu^2$  eingeht. Für die Biegewellengeschwindigkeit, die sich nach Gleichung (3.5) bestimmen lässt, muss

$$h_M = \frac{1}{n} h_O \quad (7.5)$$

gelten. Somit ist die Dicke der untersuchten Prüfobjekte für einen Maßstab 1:10 um den Faktor 10 zu verkleinern. Bei der Betrachtung des Übergangs zwischen Fluid und Festkörper ergeben sich keine weiteren Skalierungsvorschriften außer den zuvor genannten Bedingungen.

Die praktische Einhaltung sämtlicher Skalierungsvorschriften ist schwierig, da die Anzahl der Materialien, die geeignet sind, durch diese Vorschriften stark eingeschränkt wird. Neben den Eigenschaften, die ein potentiell verwendbares Material erfüllen muss, ist auch auf die Tauglichkeit zur Verarbeitung in einem Modell zu achten, um beispielsweise starre oder elastische Verbindungen herstellen zu können. Zudem sollte ein homogenes, isotropes Material verwendet werden, um den numerischen Aufwand zu verkleinern sowie mögliche Fehlerquellen bei der Modellierung auszuschließen.

### 7.1.2 Aufbau des Modells zur Untersuchung des Schalldämm-Maßes

Das Modell, das in den folgenden Abschnitten zur Untersuchung der Schalldämmung von trennenden Bauteilen verwendet wird, ist in Abbildung 7.1 skizziert. Bei diesem Modell handelt es

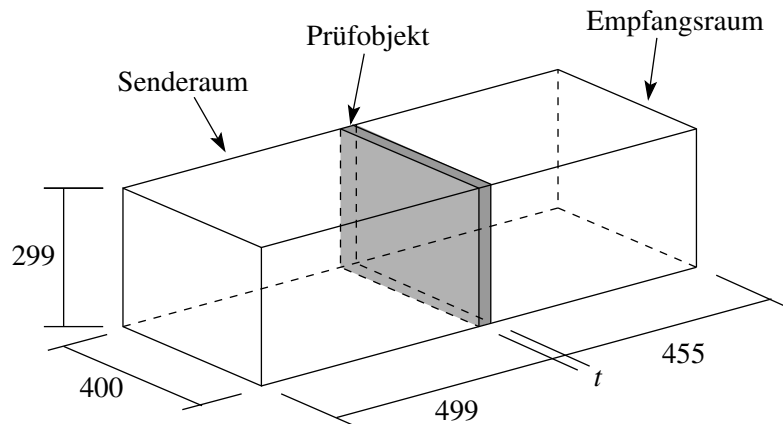


Abbildung 7.1: Abmessungen eines im Maßstab 1:10 skalierten Wandprüfstandes. Die flankierenden Bauteile sind nicht dargestellt. Alle Abmessungen in mm.

sich um das Modell eines bauakustischen Prüfstandes im Maßstab 1:10, der den im vorherigen Abschnitt definierten Anforderungen entspricht. Es entspricht in idealisierter Form dem Wandprüfstand der PTB sowie den Vorgaben nach EN ISO 140-1 [68]. So beträgt der Unterschied der Volumina von Sende- und Empfangsraum mehr als 10%. Das gleiche gilt für den Unterschied der inneren Längen der beiden Räume. Aufgrund der Abmessungen sind die Eigenfrequenzen der Luftschallmoden beider Räume in den unteren Terzbändern nahezu gleichmäßig verteilt. Es liegen zudem keine übermäßig ausgeprägten stehenden Wellen und somit keine starken Schwankungen des Schalldrucks vor. Dadurch kann im Rahmen von Messungen auf den Einsatz von Diffusoren verzichtet werden. Die Prüföffnung umfasst zudem den gesamten Querschnitt des Raumes. Im Gegensatz zu den Vorgaben der EN ISO 140-1 werden jedoch die Anforderungen in Bezug auf die

Flankenübertragung nicht erfüllt. Diese sollte unterdrückt sein. Um jedoch im Rahmen der Untersuchungen die Dämpfungseigenschaften der Schallübertragung über die Flanken untersuchen zu können, wird sie hier gezielt zugelassen.

Es sollen zwei Prüfobjekte mit unterschiedlicher Dicke  $t$  untersucht werden. Eines der Prüfobjekte hat eine Dicke von 25 mm. Dies entspricht im unskalierten System einer Wand in Massivbauweise. Das zweite Prüfobjekt hingegen weist eine Dicke  $t$  von 3 mm auf. An diesem Objekt kann das Verhalten von Leichtbauwänden bzw. dünnen Vorsatzschalen untersucht werden. Die äußeren Wände des Modells bestehen aus 25 mm dicken Acrylglasplatten, die einer 25 cm starken Ziegelwand entsprechen.

Als Material für die beiden Prüfobjekte wurde ebenfalls Acrylglas verwendet. Unskalierte bauakustische Prüfstände werden im Allgemeinen aus Beton sowie Mauerwerkswänden gebaut. Das verwendete Acrylglas erfüllt größtmäßig die zuvor gestellten Skalierungsforderungen an Elastizitätsmodul, Dichte und Dämpfung. Zudem ist dieses Material homogen und isotrop. Der gemessene viskoelastische Elastizitätsmodul des verwendeten Acrylglases ist in Abbildung 3.15 dargestellt. Die Dichte des verwendeten Acrylglases beträgt  $1180 \text{ kg/m}^3$ . Das akustische Fluid in beiden Räumen ist Luft (Dichte  $\rho_F = 1,21 \text{ kg/m}^3$ , Schallausbreitungsgeschwindigkeit  $c_F = 346 \text{ m/s}$ ). Weitere Details zum Aufbau des Prüfstands sowie der Skalierung finden sich bei Kling [114].

### 7.1.3 Aufbau des Modells zur Untersuchung der Längsdämmung

Das Schall-Längsdämm-Maß von flankierenden Bauteilen muss nach DIN 4109 bekannt sein. Viele Prüfstellen verfügen jedoch nicht über die für die Ermittlung des Schall-Längsdämm-Maßes  $R_L$  erforderlichen Prüfstände, so dass häufig die Prüfobjekte seitlich parallel zur Außenwand in einen gewöhnlichen Wandprüfstand eingebaut werden. In Abbildung 7.2 ist der Grundriss eines solchen Wandprüfstandes mit seitlich eingebautem Prüfobjekt dargestellt. Durch den Einbau des Prüfb-

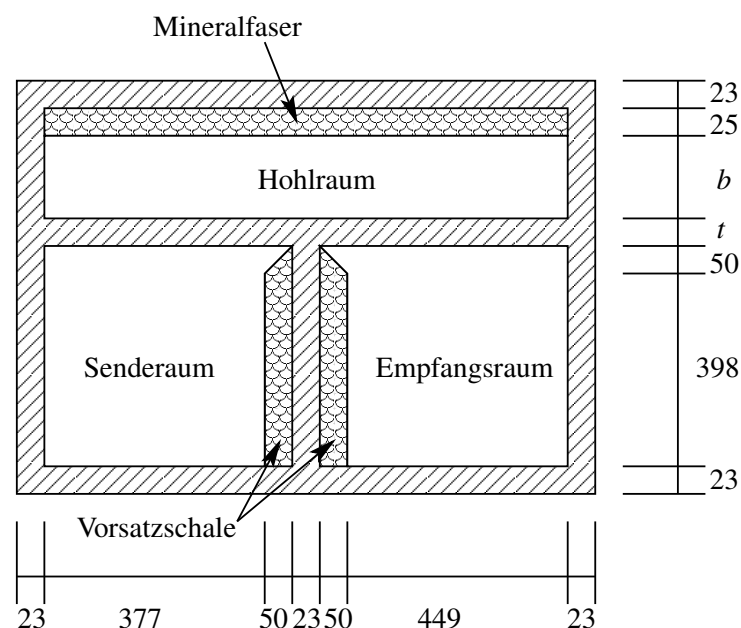


Abbildung 7.2: Abmessung eines Modell-Wandprüfstandes zur Bestimmung der Längsdämmung nach DIN 4109. Alle Abmessungen in mm.



jekts seitlich parallel zur Außenwand entsteht ein schmales Luftvolumen der Tiefe  $b$ . In Abschnitt 7.5 soll nun der Einfluss dieses Luftvolumens auf die Längsdämmung untersucht werden. Dadurch soll geklärt werden, ob und unter welchen Bedingungen die Längsdämmung in nach Abbildung 7.2 aufgebauten Prüfständen erfolgen kann. Die Simulationsergebnisse werden mit Messergebnissen der PTB verglichen, die in [164] vorgestellt wurden.

Die Untersuchungen werden wiederum an einem im Maßstab 1:10 skalierten Modellprüfstand durchgeführt. Das Prüfobjekt sowie die Trennwand zwischen Sende- und Empfangsraum bestehen analog zum Modell, das im vorherigen Abschnitt vorgestellt wurde, aus Acrylglas. Die übrigen Wände des Prüfstands sind aus mitteldichten Faserplatten (MDF) hergestellt. Es werden zwei unterschiedlich dicke Prüfobjekte untersucht, wobei das Prüfobjekt mit einer Dicke  $t$  von 3 mm einer Leichtbauwand und das zweite 23 mm dicke Prüfobjekt einer Massivwand entspricht. Die übrigen Wände des Modellprüfstands entsprechen in ihrer Dicke ebenfalls Massivwänden. Die Trennwand ist mit einer Vorsatzschale aus Hartfaserplatten versehen. Der Hohlraum zwischen Vorsatzschale und Trennwand ist mit Mineralwolle gefüllt. Das Prüfobjekt ist frei verschieblich, so dass das Luftvolumen variiert und unterschiedliche Hohlraumtiefen  $b$  untersucht werden können. Zusätzliche Details zum Aufbau des Prüfstandes sowie den durchgeführten Messungen finden sich bei Schmelzer und Scholl [164].

Im Rahmen der durchgeführten numerischen Untersuchungen sowie der Messungen werden Hohlraumtiefen von 50, 100 und 250 mm betrachtet. In einer weiteren Konfiguration ist die Außenwand entfernt, so dass kein abgeschlossenes Luftvolumen vorhanden ist. Um die Bedämpfung des Luftvolumens zu vergrößern, wird als weitere Konfiguration an die Außenwand für Hohlraumtiefen von 50 und 100 mm eine Schicht von 25 mm Mineralwolle eingebracht, die fest an der Außenwand anliegt.

## 7.2 Einfluss der Fluiddämpfung auf die Schall- und die Längsdämmung

In diesem Abschnitt soll der Einfluss der Fluiddämpfung auf die Schalldämmung untersucht werden. Dieser Effekt wurde von Hampel für Außenraumprobleme analysiert [87]. Allerdings sind die Anwendungen, die dort betrachtet werden, auf einen sehr niedrigen Frequenzbereich beschränkt. In diesem Bereich ist der Einfluss der Fluiddämpfung vernachlässigbar gering. Das gleiche Ergebnis ergibt sich für den tiefen Frequenzbereich für Innenraumprobleme [41]. Im folgenden Abschnitt soll nun der Einfluss der Fluiddämpfung für größere Frequenzen betrachtet werden.

In Abbildung 7.1 ist das Modell eines Wandprüfstandes dargestellt, an dem der Einfluss der Fluiddämpfung auf das Schalldämm-Maß untersucht werden soll. Dieser Modellprüfstand wird im weiteren Verlauf detailliert analysiert. Hier soll nur der Einfluss der Fluiddämpfung betrachtet werden. Das Fluid in den beiden Räumen ist Luft ( $c_F=346$  m/s,  $\rho_F=1,21$  kg/m<sup>3</sup>) und das Trennbauteil zwischen den beiden Räumen besteht aus Acrylglas, dessen Materialparameter von der PTB gemessen wurden. Der viskoelastische Elastizitätsmodul des Acrylglases ist in Abbildung 3.15 angegeben. Es werden zwei unterschiedlich dicke Wände untersucht wobei die dünnere Wand 3 mm stark ist und auf Grund der Skalierung einer Leichtbauwand entspricht. Die dickere Wand, die einer Massivwand entspricht, hat eine Dicke von 23 mm. Alle freien Fluidoberflächen werden als schallhart angenommen. Da für den tiefen Frequenzbereich keine Abweichungen für das Schalldämm-Maß zwischen dem gedämpften und dem ungedämpften Fluid zu erwarten ist, wird ein zweidimensionales Modell untersucht, das die Betrachtung höherer Frequenzen in annehmbarer Rechenzeit

ermöglicht. Dazu wird der Senderraum mit 69500 Quad4 Elementen und der Empfangsraum mit 78000 Quad4 Elementen diskretisiert. Die Diskretisierung des Trennbauteils besteht aus 250 Balkenelementen. Das Trennbauteil wird an beiden Seiten eingespannt. Der untersuchte Frequenzbereich erstreckt sich von 45 bis 35960 Hz. Als Anregung dienen statistisch verteilte Punktschallquellen.

In Abbildung 7.3 sind die Ergebnisse der Simulation für die zwei unterschiedlich dicken Trennbauteile dargestellt. Für die Luftfeuchte  $\phi$  wird 30% angenommen und die dynamische Viskosität  $\eta$  der Luft beträgt  $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ g/(cm}\cdot\text{s)}$ . Wie erwartet, ist der Einfluss der Fluiddämpfung im tiefen

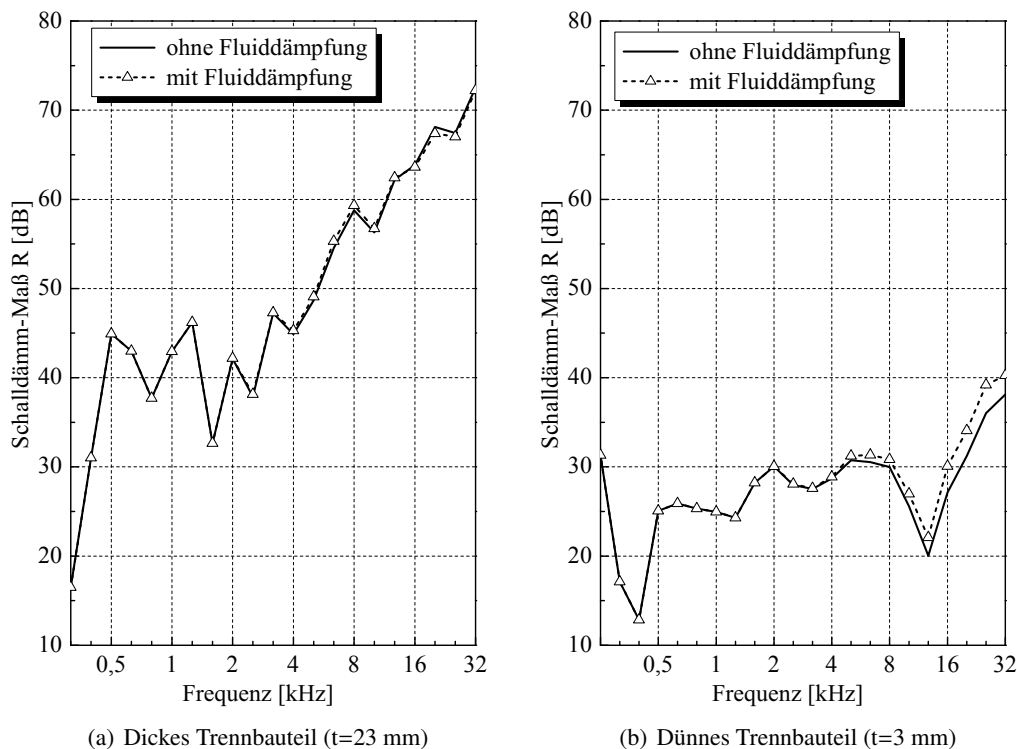


Abbildung 7.3: Schalldämm-Maß über der Frequenz. Untersuchung des Einflusses der Fluiddämpfung auf das Schalldämm-Maß für zwei unterschiedlich dicke Trennbauteile

Frequenzbereich nicht signifikant. Hier ergibt sich für beide Trennbauteile kein erkennbarer Unterschied im Schalldämm-Maß. Ab rund 4 kHz zeigt sich jedoch für das dünne Trennbauteil ein leichter Unterschied, der mit zunehmender Frequenz immer deutlicher wird. Das Schalldämm-Maß ist für das Modell mit Fluiddämpfung größer als für das Modell ohne Fluiddämpfung. Für das dicke Trennbauteil hingegen ist im betrachteten Frequenzbereich kein Einfluss auf das Schalldämm-Maß zu erkennen. Lediglich für einige wenige Terzen ergibt sich eine Abweichung von 0,5 bis 1 dB, die allerdings unregelmäßig auftreten. Aufgrund dieser Ergebnisse wird in den folgenden Berechnungen die Fluiddämpfung im Modell berücksichtigt.

Ebenso wie zuvor für das Trennbauteil soll auch für das flankierende Bauteil der Einfluss der Fluiddämpfung untersucht werden. Dazu wird für den in Abschnitt 7.1.3 vorgestellten Modellprüfstand mit einer Hohlraumtiefe von 250 mm die Längsdämmung bestimmt, wobei in diesen Hohlraum keine Mineralwolle eingebracht wird. Die Diskretisierung der Fluidgebiete erfolgt mit dem in Abschnitt 5.2 beschriebenen akustischen Quad4 Element. Für den Senderraum werden 16760 Ele-

mente und für den Empfangsraum 19840 Elemente dieses Typs verwendet. Das flankierende Bauteil wird mit 298 Balkenelementen und das Trennbauteil mit 110 Balkenelementen diskretisiert. Für den Hohlraum werden 22350 Quad4 Elemente zur Diskretisierung verwendet, wobei hier ein Hohlraum mit einer Tiefe  $b$  von 250 mm betrachtet wird. Zwischen akustischem Fluid und elastischer Struktur befinden sich zudem 598 Kopplungselemente. Alle freien Fluidoberflächen werden als schallhart angenommen.

Das Schall-Längsdämm-Maß  $R_L$  für beide Bauteile ist in Abbildung 7.4 dargestellt. Im Gegensatz

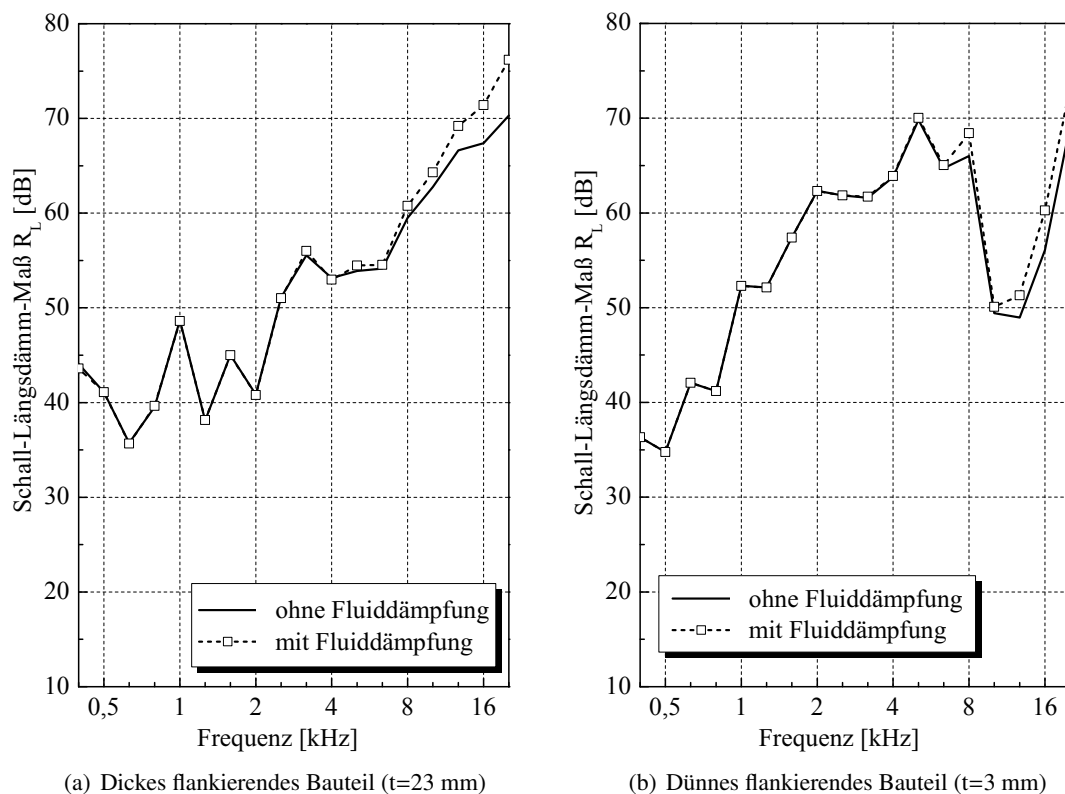
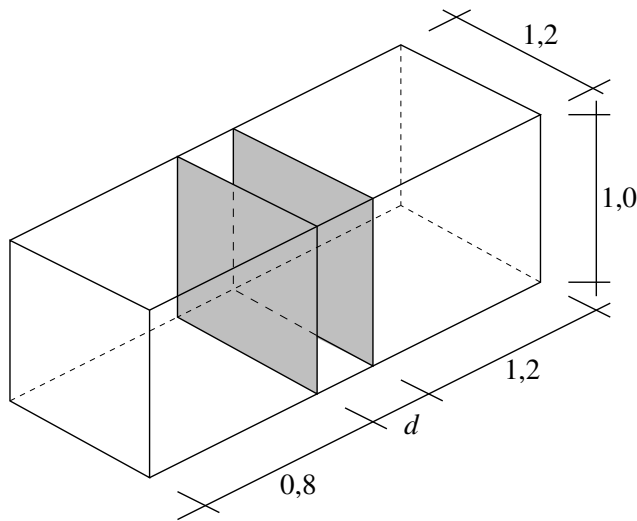


Abbildung 7.4: Schall-Längsdämm-Maß über der Frequenz. Untersuchung des Einflusses der Fluiddämpfung für zwei unterschiedlich dicke flankierende Bauteile.

zum zuvor untersuchten Trennbauteil zeigen sich hier für beide Bauteildicken im höheren Frequenzbereich signifikante Unterschiede. Ab rund 8 kHz divergieren das Schall-Längsdämm-Maß für den ungedämpften und den gedämpften Fall. Da hier für beide Konfigurationen signifikante Abweichungen im Schall-Längsdämm-Maß auftreten, wird in den folgenden Abschnitten stets die Fluiddämpfung im Modell berücksichtigt.

### 7.3 Schalldämmung einer zweischaligen Wand

Im folgenden Abschnitt soll das Schalldämmverhalten einer zweischaligen Konstruktion, die in Abbildung 7.5 dargestellt ist, untersucht werden. Das zweischalige Bauteil besteht aus einer Doppelwand aus Gipskarton. Der Hohlraum zwischen den beiden Gipskartonplatten wird mit verschiedenen Materialien gefüllt, wobei als Referenzlösung ein mit Luft gefüllter Hohlraum dient.

**Luft:**

$$c_F = 346 \text{ m/s}$$

$$\rho_F = 1,21 \text{ kg/m}^3$$

**Gipskarton:**

$$E = 3,0 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0,15$$

$$\rho = 800 \text{ kg/m}^3$$

$$t = 1,25 \text{ cm}$$

$$d = 5,0 \text{ cm}$$

Abbildung 7.5: Abmessungen und Materialparameter einer zweischaligen Gipskartonwand. Alle Abmessungen in m.

Die Materialparameter der porösen Füllstoffe sind in Tabelle 7.1 zusammengestellt. Neben Luft

Material	$\phi$ [-]	$\alpha_\infty$ [-]	$R_L$ [Ns/m <sup>4</sup> ]	$\Lambda_v$ [ $\mu$ m]	$\Lambda_t$ [ $\mu$ m]
Mineralfaser [149]	0,95	1,40	25000	93	186
Steinwolle [12]	0,94	2,10	135000	49	166
Glaswolle [11]	0,94	1,06	40000	56	11
PUR [147]	0,90	7,80	25000	226	226
PCD [43]	0,97	2,52	87000	36	119

Tabelle 7.1: Materialkenngrößen der verwendeten porösen Dämmstoffe, die als äquivalentes Fluid beschrieben werden

wird der Hohlraum mit Dämmstoffen aus Mineralfaser, Steinwolle, Glaswolle, Polycarbodiimid (PCD) sowie Polyurethan (PUR) gefüllt. Im ersten Schritt werden diese Dämmstoffe im Modell über einen äquivalenten Fluidansatz beschrieben [37]. Zum Vergleich werden im zweiten Schritt in Abschnitt 7.3.1 die Füllmaterialien als poroelastisches Kontinuum im Modell erfasst, dessen Grundgleichungen in Abschnitt 4.4 beschrieben wurden. Abschließend werden die Ergebnisse, die mit Hilfe der beiden Verfahren bestimmt wurden, miteinander verglichen. Der Senderraum wird mit 4760 Hex27 Elementen diskretisiert. Für den Empfangsraum werden 6800 Elemente und für den Hohlraum 1020 Elemente des gleichen Typs verwendet. Jede der beiden Gipskartonplatten wird mit 340 DSG9 Elementen diskretisiert. Die freien Fluidoberflächen aller drei Räume werden als schallhart angenommen. Beide Gipskartonplatten werden an allen Kanten eingespannt. Die verwendete Diskretisierung ist in Abbildung 7.6 dargestellt. Das System wird durch Punktschallquellen im Empfangsraum angeregt, die statistisch verteilt sind. Der betrachtete Frequenzbereich liegt zwischen 0 und 500 Hz, wobei die Abtastung 1 Hz beträgt.

Die terzgemittelten Schalldämm-Maße, die für die unterschiedlichen Füllmaterialien berechnet wurden, sind in Abbildung 7.7 zusammengestellt. Je nach Füllmaterial ergeben sich stark unterschiedliche Schalldämmkurven. Dabei scheint der dominierende Materialparameter der längen-

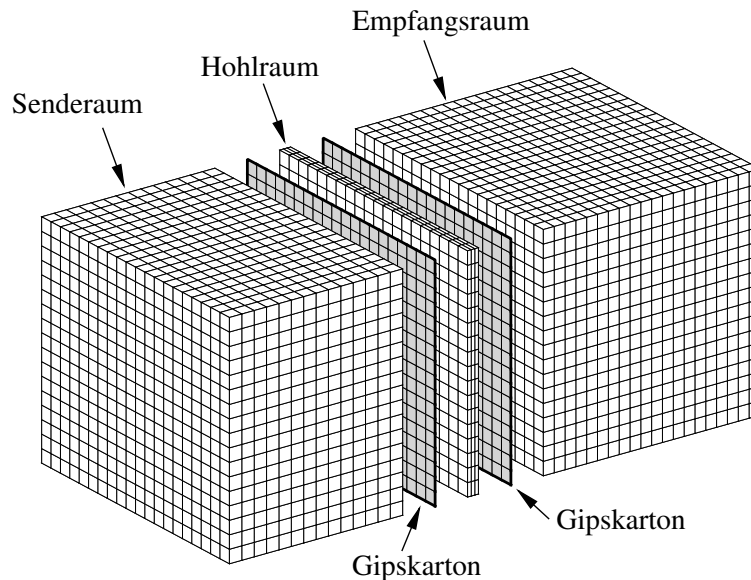


Abbildung 7.6: Diskretisierung der zweischaligen Gipskartonwand aus Abbildung 7.5

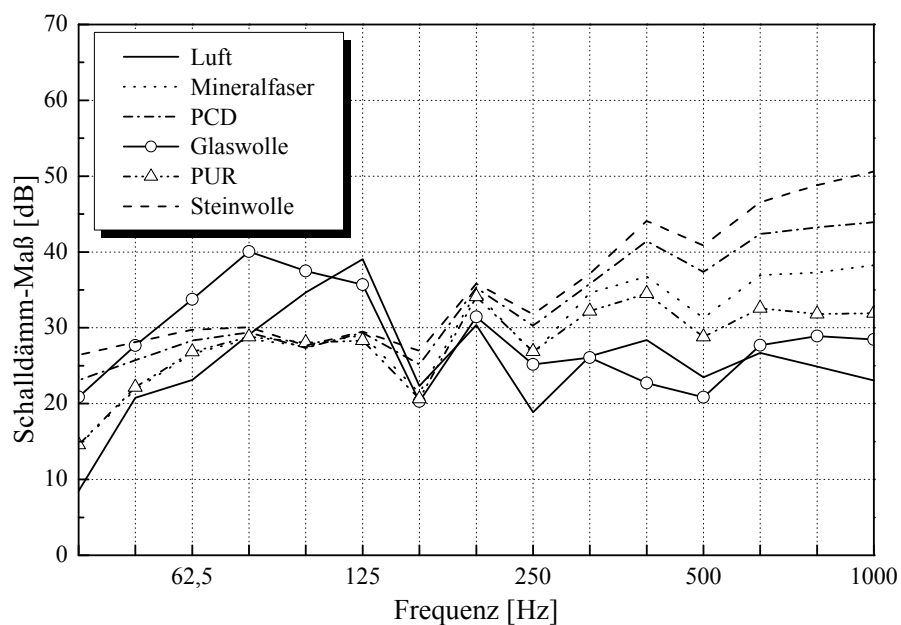


Abbildung 7.7: Schalldämm-Maß für verschiedene absorbierende Materialien im Zwischenraum einer zweischaligen Gipskartonwand im Vergleich zu einem mit Luft gefüllten Zwischenraum

bezogene Strömungswiderstand  $R_L$  zu sein. So ergibt sich für Steinwolle, dessen Strömungswiderstand  $135000 \text{ N/m}^2$  beträgt, über nahezu den gesamten betrachteten Frequenzbereich die beste Schalldämmung. PCD, dessen Strömungswiderstand mit  $87000 \text{ Ns/m}^4$  der zweitgrößte ist, hat demzufolge auch das zweitbeste Schalldämmverhalten. Für die übrigen Materialien ist der Unterschied im Vergleich zur Steinwolle und PCD weniger stark, so dass deren Schalldämm-Maße

im tiefen Frequenzbereich nahezu gleich groß sind. Im höheren Frequenzbereich ab etwa 250 Hz sind dann jedoch signifikante Unterschiede zu erkennen. Zusammenfassend kann also festgestellt werden, dass der längenbezogene Strömungswiderstand der dominierende Faktor bezüglich der Schalldämmung ist. Der Einfluss der übrigen Materialparameter ist weniger stark ausgeprägt. Die Differenz zwischen PUR und Mineralfaser (MiFa) dürfte in den unterschiedlichen Werten für die Porosität  $\phi$  oder der Tortuosität  $\alpha_\infty$  liegen. In [2] wird der Einfluss der Tortuosität genauer untersucht. Dabei stellt sich heraus, dass trotz stark unterschiedlicher Werte nahezu kein Einfluss auf das schmalbandige Schalldämm-Maß erkennbar ist. Allerdings beschränken sich die Untersuchungen auf einen Frequenzbereich bis 300 Hz. Um genauere Aussagen in Bezug auf die Porosität und die Tortuosität und deren Einfluss auf das Schalldämm-Maß machen zu können, sind somit weitere Untersuchungen nötig. Die übrigen Materialparameter spielen nur eine untergeordnete Rolle.

### 7.3.1 Vergleich des äquivalenten Fluidansatzes und der (u,p)-Formulierung zur Beschreibung poröser Füllstoffe

Im vorherigen Abschnitt wurde das poröse Füllmaterial im Zwischenraum der zweischaligen Gipskartonwand mit Hilfe eines äquivalenten Fluidansatzes beschrieben. Die mit Hilfe dieses Ansatzes ermittelten Schalldämm-Maße sollen in diesem Abschnitt mit dem in Abschnitt 4.4 vorgestellten Ansatz nach Atalla et al. verglichen werden, der neben dem Porenfluid auch das elastische Korngerüst berücksichtigt.

Die verwendete Diskretisierung entspricht der Diskretisierung auf dem vorherigen Abschnitt. Abweichend wird jedoch der Hohlraum mit 1020 Hexaeder Elementen, die auf der (u,p) Formulierung beruhen, diskretisiert. Neben der direkten Kopplung von elastischer Struktur und porösem Füllstoff wird zusätzlich ein Aufbau analysiert, bei dem eine 1 mm starke Luftschicht zwischen der Gipskartonplatte und dem porösen Füllmaterial liegt. Diese beiden unterschiedlichen Konfigurationen sind in Abbildung 7.8 skizziert. Zusätzlich zu den in Tabelle 7.1 angegebenen Mate-

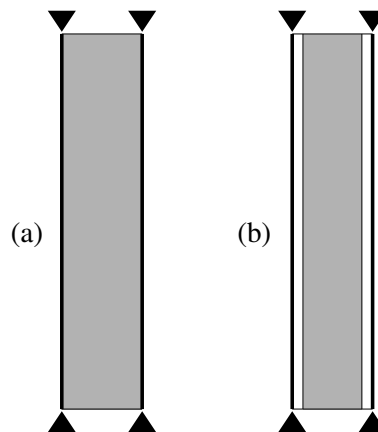


Abbildung 7.8: Untersuchte Hohlraumaufbauten für (u,p)-Formulierung: (a) Poröser Füllstoff direkt in Kontakt mit Struktur (b) 1 mm starke Luftschicht zwischen porösem Füllstoff und Struktur

rialparametern werden Materialparameter zur Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens des Korngerüsts benötigt. Diese sind für Steinwolle und Mineralfaser Tabelle 7.2 zusammengestellt. Darin sind  $E$  der viskoelastische Elastizitätsmodul,  $\nu$  die Querkontraktionszahl und  $\rho_s$  die Dichte des Korngerüstmaterials. Sowohl die Anregung als auch der betrachtete Frequenzbereich entspre-

Material	$E$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\nu$ [-]	$\rho_s$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Mineralfaser [11]	$2,2 \cdot 10^6 (1+0,1i)$	0.0	2147
Steinwolle [12]	$4,4 \cdot 10^6 (1+0,1i)$	0.0	2167

Tabelle 7.2: Materialkenngrößen der verwendeten porösen Dämmstoffe. Zusätzlich zu Tabelle 7.1 benötigte Kenngrößen zur Verwendung der (u,p) Formulierung nach Atalla

chen denen des vorherigen Abschnitts.

Im ersten Schritt soll das Schalldämm-Maß für die Konfiguration nach Abbildung 7.8(b) untersucht werden. In Abbildung 7.9 ist das Schalldämm-Maß für den mit Mineralfaser gefüllten Zwischenraum dargestellt. Über den gesamten betrachteten Frequenzbereich ist kein signifikanter Un-

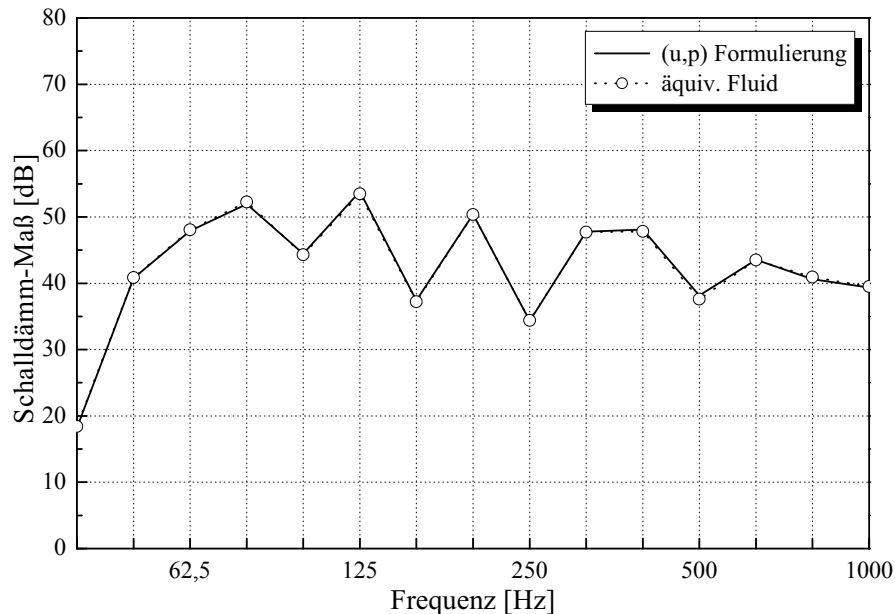


Abbildung 7.9: Schalldämm-Maß für eine Zwischenschicht aus Mineralfaser. Wandaufbau nach Abbildung 7.8(b)

terschied zwischen den Ergebnissen der (u,p) Formulierung sowie des äquivalenten Fluidansatzes zu erkennen. Wird der Zwischenraum mit Steinwolle gefüllt, so ergibt sich das in Abbildung 7.10 dargestellte Schalldämm-Maß. Für diese Zwischenschicht sind im mittleren Frequenzbereich Abweichungen von rund 1 dB zwischen den beiden Formulierungen festzustellen. Der Unterschied in den beiden Füllmaterialien liegt hauptsächlich im Elastizitätsmodul. Dieser ist für die Steinwolle doppelt so groß wie für die Mineralfaser. Die Steifigkeit des Korngerüsts der Zwischenschicht hat somit einen relativ kleinen Einfluss auf das Schalldämm-Maß, da die Steinwolle ein vergleichsmäßig steifes Korngerüst besitzt [149].

Für die Konfiguration (a) nach Abbildung 7.8, in der die Gipskartonwand und das poroelastische Medium direkt miteinander in Kontakt stehen, sind die ermittelten Schalldämm-Maße in den Abbildungen 7.11 und 7.12 zusammengestellt. Im Gegensatz zur Konfiguration (b) ist hier sowohl für die Zwischenschicht aus Mineralfaser als auch die Schicht aus Steinwolle ein signifikanter Unter-

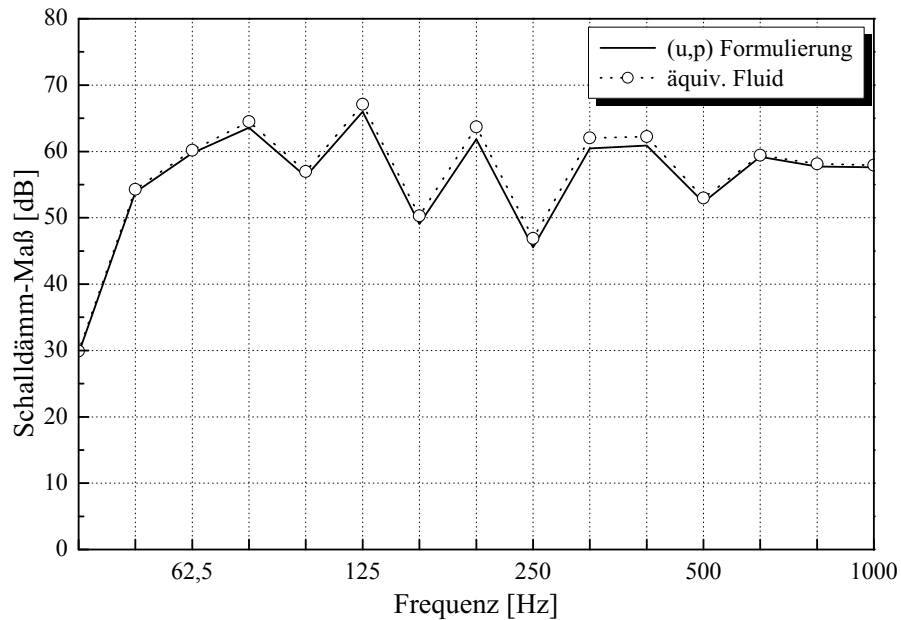


Abbildung 7.10: Schalldämm-Maß für eine Zwischenschicht aus Steinwolle. Wandaufbau nach Abbildung 7.8(b)

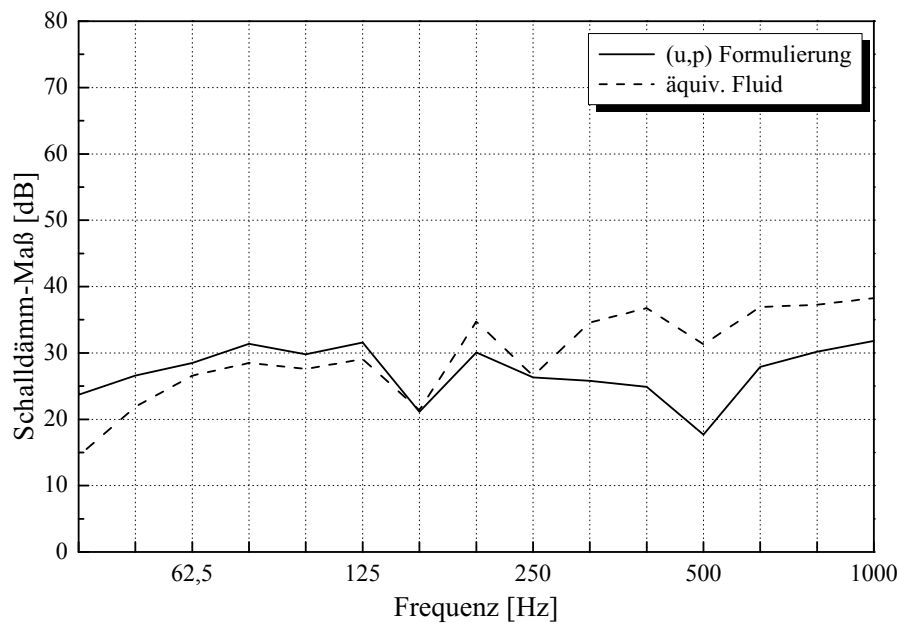


Abbildung 7.11: Schalldämm-Maß für eine Zwischenschicht aus Mineralfaser. Wandaufbau nach Abbildung 7.8(a)

schied zwischen der (u,p) Formulierung und dem äquivalenten Fluidansatz im Schalldämm-Maß zu erkennen. Im tiefen Frequenzbereich bis 160 Hz liegt dabei das Schalldämm-Maß für die (u,p) Formulierung stets oberhalb des Schalldämm-Maßes, dass unter Verwendung des äquivalenten



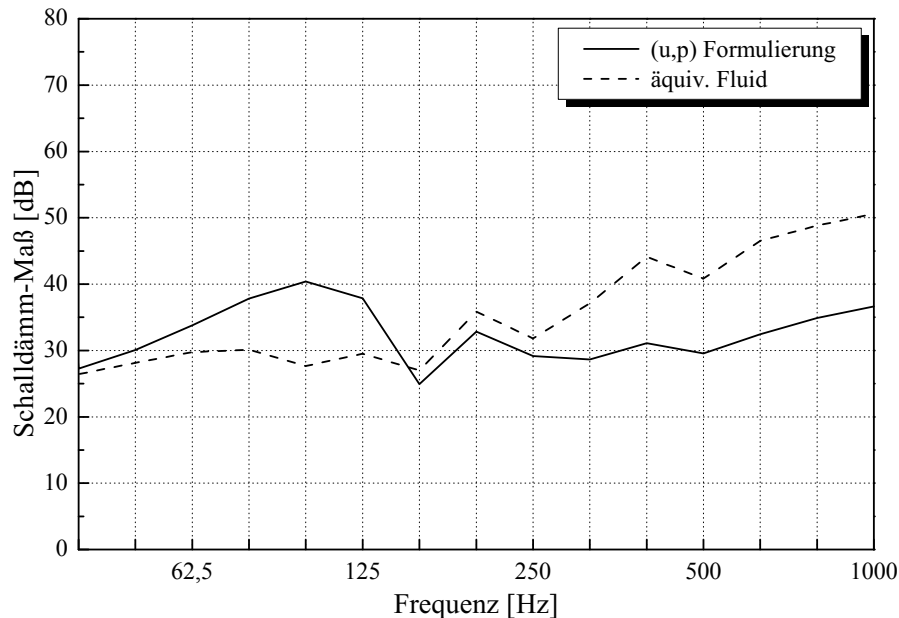


Abbildung 7.12: Schalldämm-Maß für eine Zwischenschicht aus Steinwolle. Wandaufbau nach Abbildung 7.8(a)

Fluidansatzes bestimmt wird. Wie bereits in Abschnitt 2.1.1 festgestellt wurde, hat im tiefen Frequenzbereich die Steifigkeit des Materials, aus dem das Trennbauteil besteht, den größten Einfluss auf das Schalldämm-Maß der Konstruktion. Der äquivalente Fluidansatz berücksichtigt die Steifigkeit des Korngerüsts nicht und somit ergibt sich für dieses Modell eine niedrigere Schalldämmung. Beide Modelle zeigen signifikante Einbrüche für 160 und 500 Hz. Für das äquivalente Fluidmodell ist jedoch eine zusätzliche Resonanz bei 250 Hz zu beobachten, die sich in der (u,p) Formulierung nicht ergibt. Diese Moden können dem Sende- bzw. dem Empfangsraum zugeordnet werden.

Abschließend sollen die Ergebnisse für den vollständig gekoppelten Wandaufbau (vgl. Abbildung 7.8(b)) und den teilweise gekoppelten Wandaufbau nach Abbildung 7.8(a) miteinander verglichen werden. Für beide Formulierungen ergibt sich über den gesamten betrachteten Frequenzbereich für die Zwischenschicht aus Steinwolle ein höheres Schalldämm-Maß als für einen mit Mineralfaser gefüllten Hohlraum. Allerdings liegen die Werte, die sich für die Konfiguration mit der zusätzlichen 1 mm starken Luftschicht ergeben, deutlich über den Schalldämm-Maßen für die direkt miteinander gekoppelten Teilgebiete. Daraus folgt, dass neben der Wechselwirkung von Porenfluid und Gipskartonplatte auch die Interaktion des Korngerüsts des porösen Materials und der Gipskartonplatte einen sehr starken Einfluss auf die Schallübertragung haben. Dieser Übertragungsweg ist für den Wandaufbau mit der 1 mm starken Luftschicht vollständig unterbunden. Daraus wird deutlich, dass selbst für weiche poröse Materialien die Steifigkeit des Korngerüsts in der Simulation berücksichtigt werden muss, da sie einen signifikanten Einfluss auf das ermittelte Schalldämm-Maß hat. Der äquivalente Fluidansatz ist somit nicht in der Lage, das Verhalten des porösen Materials ausreichend genau zu beschreiben.

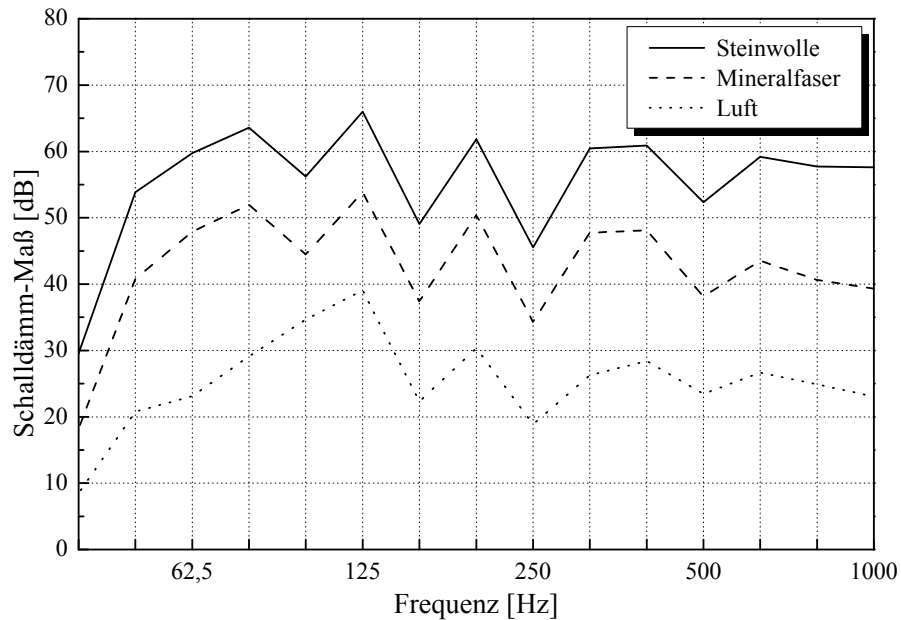


Abbildung 7.13: Vergleich des Schalldämm-Maßes für den zweischaligen Wandaufbau mit 1 mm Luftschicht zwischen Gipskarton und porösem Material

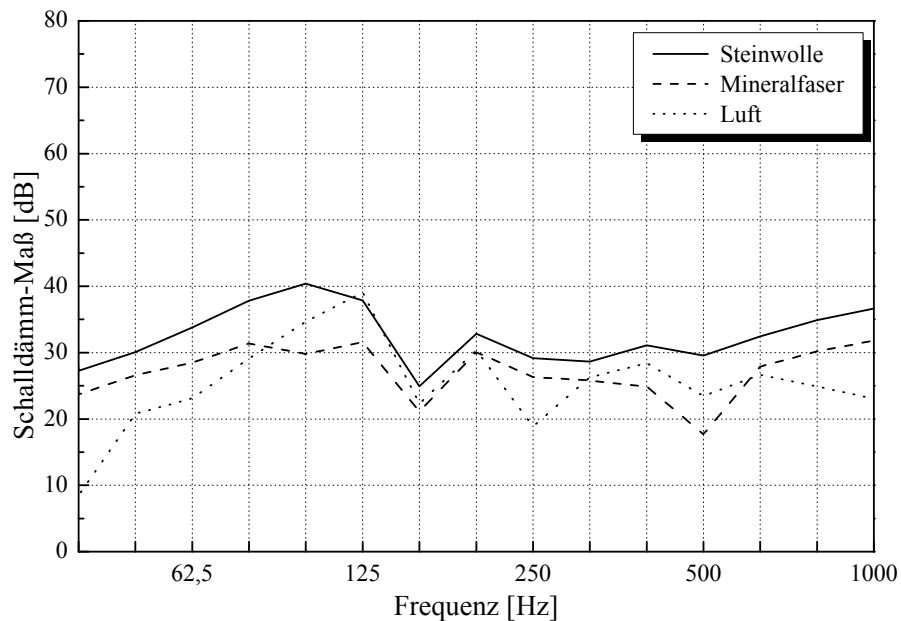
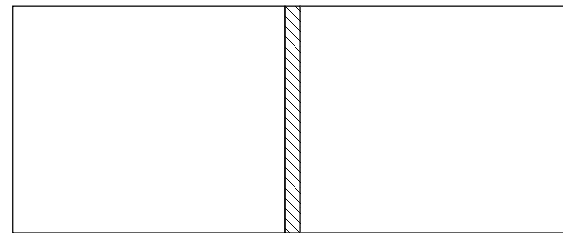


Abbildung 7.14: Schalldämm-Maß für den vollständig gekoppelten Wandaufbau nach Abbildung 7.8(a)

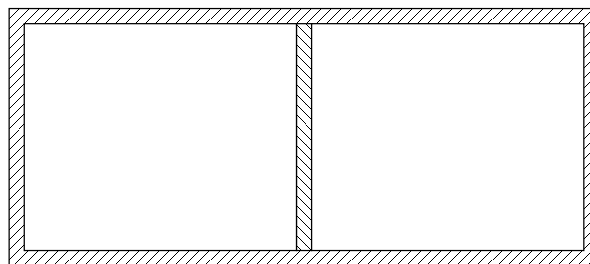
## 7.4 Einfluss der Flankenübertragung auf die Schalldämmung von trennenden Bauteilen

Im folgenden Abschnitt soll der Einfluss der Flankenübertragung auf die Schalldämmung von trennenden Bauteilen untersucht werden. Dazu werden fünf verschiedene Konfigurationen un-

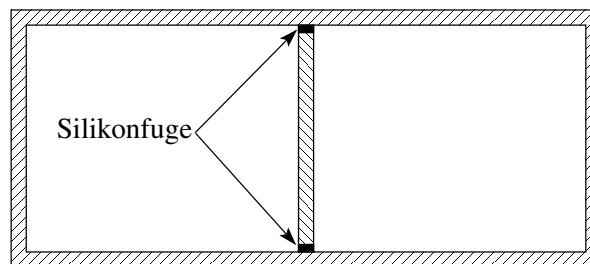
tersucht, die in Abbildung 7.15 schematisch im Grundriss dargestellt sind. Für Konfiguration A



(a) Konfiguration A/B



(b) Konfiguration C



(c) Konfiguration D/E

Abbildung 7.15: Schematische Darstellung der Konfigurationen zur Untersuchung des Einflusses flankierender Bauteile auf das Schalldämm-Maß eines Trennbauteils

werden für das Trennbauteil linear elastische Materialparameter verwendet, die vom Hersteller des Acrylglases bereitgestellt werden. Die angegebene Dichte wird auch für die übrigen drei Konfigurationen verwendet:  $E=5,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\nu=0,37$ ,  $\rho=1180 \text{ kg/m}^3$ . Die Simulationen der übrigen Konfigurationen verwenden anstatt des o.g. Elastizitätsmoduls und der Querkontraktionszahl  $\nu$  den viskoelastischen Elastizitätsmodul sowie den viskoelastischen Schubmodul nach Abbildung 3.15 bzw. Anhang B.1, der von der PTB gemessen wurde. Die flankierenden Bauteile werden in den Konfigurationen A und B nicht berücksichtigt, sondern gehen erst in den Konfigurationen C, D und E in das Modell ein. Während in Konfiguration C das Trennbauteil biegesteif mit den flankierenden Bauteilen verbunden ist, enthält Konfiguration D eine 5 mm starke Silikonfuge, die umlaufend zwischen dem Trennbauteil und den flankierenden Bauteilen liegt. Diese Silikonfuge wurde auch im Rahmen einer der von der PTB untersuchten Messkonfiguration eingebaut und soll das Trennbauteil von den flankierenden Bauteilen entkoppeln. Die Simulation der Konfiguration E berücksichtigt zusätzlich zu den viskoelastischen Materialparametern, den flankierenden Bauteilen und der Silikonfuge auch die Fluiddämpfung, die bereits in Abschnitt 7.2 detailliert betrachtet wurde.

Die Messungen, die von der PTB durchgeführt wurden, sind für zwei unterschiedliche Aufbauten durchgeführt worden. Bei Aufbau M1 ist das Trennbauteil biegesteif mit den flankierenden Bauteilen verklebt wohingegen bei Aufbau M2 eine 5 mm starke Silikonschicht zwischen dem Trennbauteil und den flankierenden Bauteilen eingebracht wurde.

Im Rahmen der zweidimensionalen Simulation wird der Senderaum mit 69500 bilinearen Fluidelementen mit vier Knoten diskretisiert. Für die Diskretisierung des Empfangsraumes werden 78000 äquivalente Elemente verwendet. Das Trennbauteil wird mit 250 Balkenelementen und die flankierenden Bauteile mit 2100 Balkenelementen diskretisiert. Freie Fluidoberflächen werden als schallhart angenommen. Als Anregung werden Punktschallquellen an verschiedenen Positionen des Senderaums vorgegeben. Über die verschiedenen Lautsprecherpositionen wird dann das ermittelte Schalldämm-Maß gemittelt.

In Abbildung 7.16 ist das berechnete terzgemittelte Schalldämm-Maß für die Konfigurationen A, B und C dargestellt. Sowohl für das dicke als auch das dünne Trennbauteil ist eine leichte Zunahme des Schalldämm-Maßes zu erkennen, wenn anstatt der linear elastischen (Konfiguration A) die viskoelastischen Materialparameter (Konfiguration B) verwendet werden. Zudem werden einzelne Einbrüche in Konfiguration B stärker bedämpft als in Konfiguration A. Dies lässt sich durch das in Abschnitt 2.1.1 am Einmassenschwinger beschriebene Verhalten begründen. Für das dünnere Bauteil ist ab der Koinzidenzfrequenz, die nach Gleichung (3.7) bei rund 10 kHz liegt, in Konfiguration B eine rund 1 dB größere Schalldämmung erkennbar. Im Rahmen der Simulation kann bei rund 10 kHz für das dünne Trennbauteil ebenfalls ein Einbruch beobachtet werden, der ebenfalls mit dem Koinzidenzeffekt zu begründen ist.

Werden zusätzlich zum trennenden Bauteil auch die flankierenden Bauteile berücksichtigt (Konfiguration C), so nimmt das Schalldämm-Maß wie erwartet über weite Bereiche des betrachteten Frequenzbereiches deutlich ab, da über die flankierenden Bauteile zusätzliche Schallenergie vom Sende- in den Empfangsraum übertragen werden kann. Dies ist in den Abbildungen 7.17(c) bzw. 7.17(d) für beide untersuchten Wandstärken zu erkennen. Allerdings ist dieser Effekt für das dünne Prüfobjekt deutlich schwächer als für das dicke Prüfobjekt.

Die umlaufende Silikonfuge, die in Konfiguration D im Modell berücksichtigt wird, glättet den Verlauf des Schalldämm-Maßes zusätzlich. So sind im Bereich von rund 2 bis 4 kHz für das dicke Trennbauteil mehrere Moden stark bedämpft. Ein ähnliches Verhalten lässt sich auch für das dünne Trennbauteil beobachten. Allerdings ist der Einbruch im Bereich der Koinzidenz rund 1 dB größer. Im tiefen Frequenzbereich verschlechtert sich zudem das Schalldämm-Maß über mehrere Terzen bis hinauf zu etwa 2 kHz. Dieser Effekt lässt sich jedoch nur für das massive, dicke Trennbauteil beobachten. Das Schalldämm-Maß des dünnen Trennbauteils verschlechtert sich nur für eine Terz um rund 1 dB. Für das dicke Trennbauteil stimmt die Koinzidenz ebenso wie für das dünne Trennbauteil gut mit dem theoretischen Wert von etwa 1,3 kHz überein. In diesem Bereich ist ein signifikanter Einbruch im Verlauf des Schalldämm-Maßes zu erkennen. Wie bereits in Abschnitt 7.2 festgestellt wurde, spielt die Dämpfung im akustischen Fluid nur für das dünne Trennbauteil im oberen Frequenzbereich eine entscheidende Rolle. Für das Schalldämm-Maß des dicken Trennbauteils sind in Abbildung 7.17(c) keine Unterschiede zu erkennen. Dagegen weicht für das dünne Trennbauteil (vgl. Abbildung 7.17(d)) das Schalldämm-Maß für Konfiguration E um rund 3 dB vom Schalldämm-Maß der Konfiguration D ab.

In Abbildung 7.18 sind die von der PTB gemessenen Schalldämm-Maße sowie das berechnete Schalldämm-Maß der Konfiguration E dargestellt. Wie zuvor erwähnt, wurden im Rahmen der Messungen zwei unterschiedliche Konfigurationen untersucht. In Konfiguration M1 ist das Trennbauteil starr mit den flankierenden Bauteilen verklebt. Die zweite untersuchte Konfiguration M2

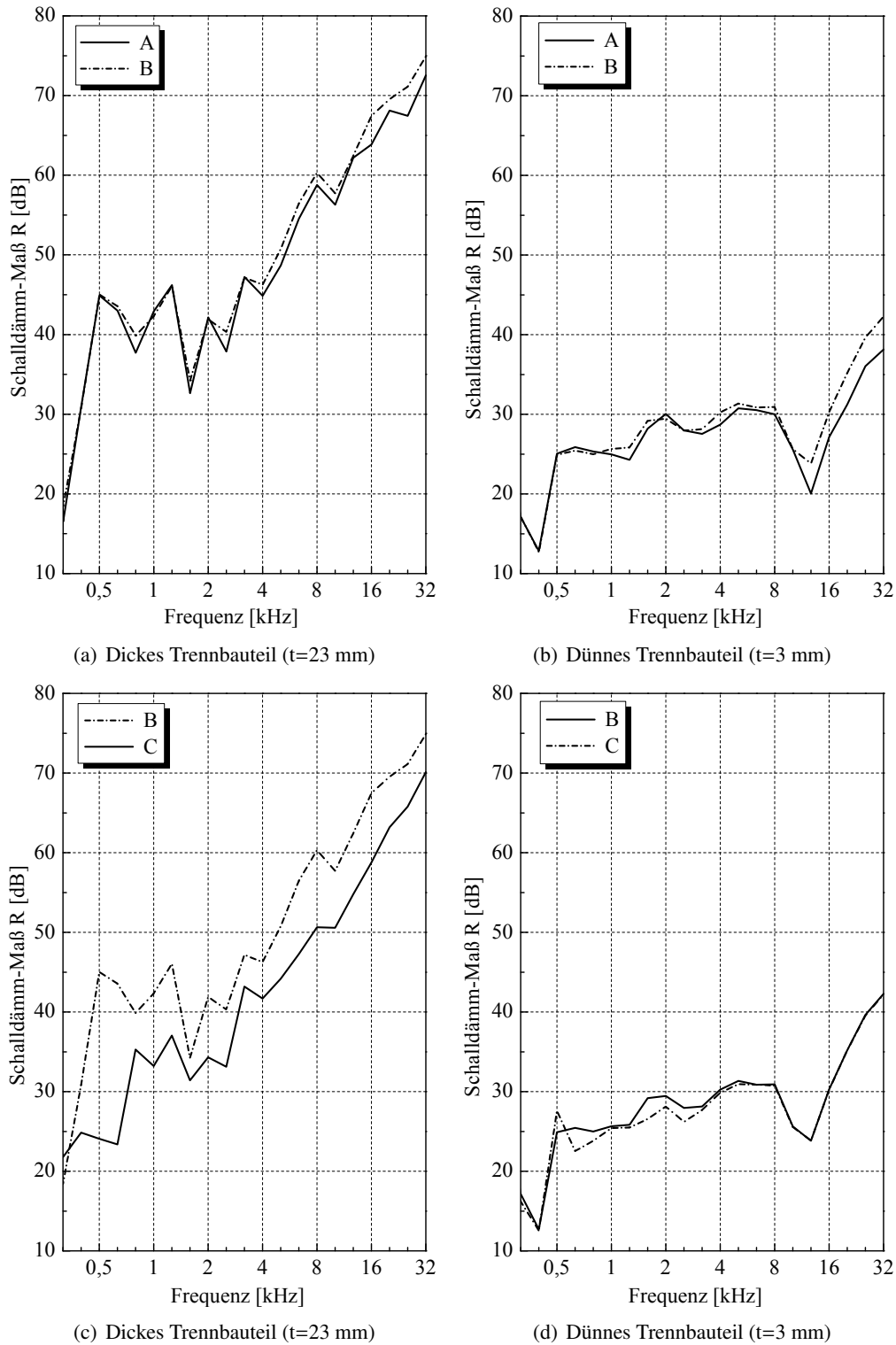


Abbildung 7.16: Schalldämm-Maß über der Frequenz. Simulationsergebnisse für das dünne und das dicke Trennbauteil für die Konfigurationen A, B und C nach Abbildung 7.15

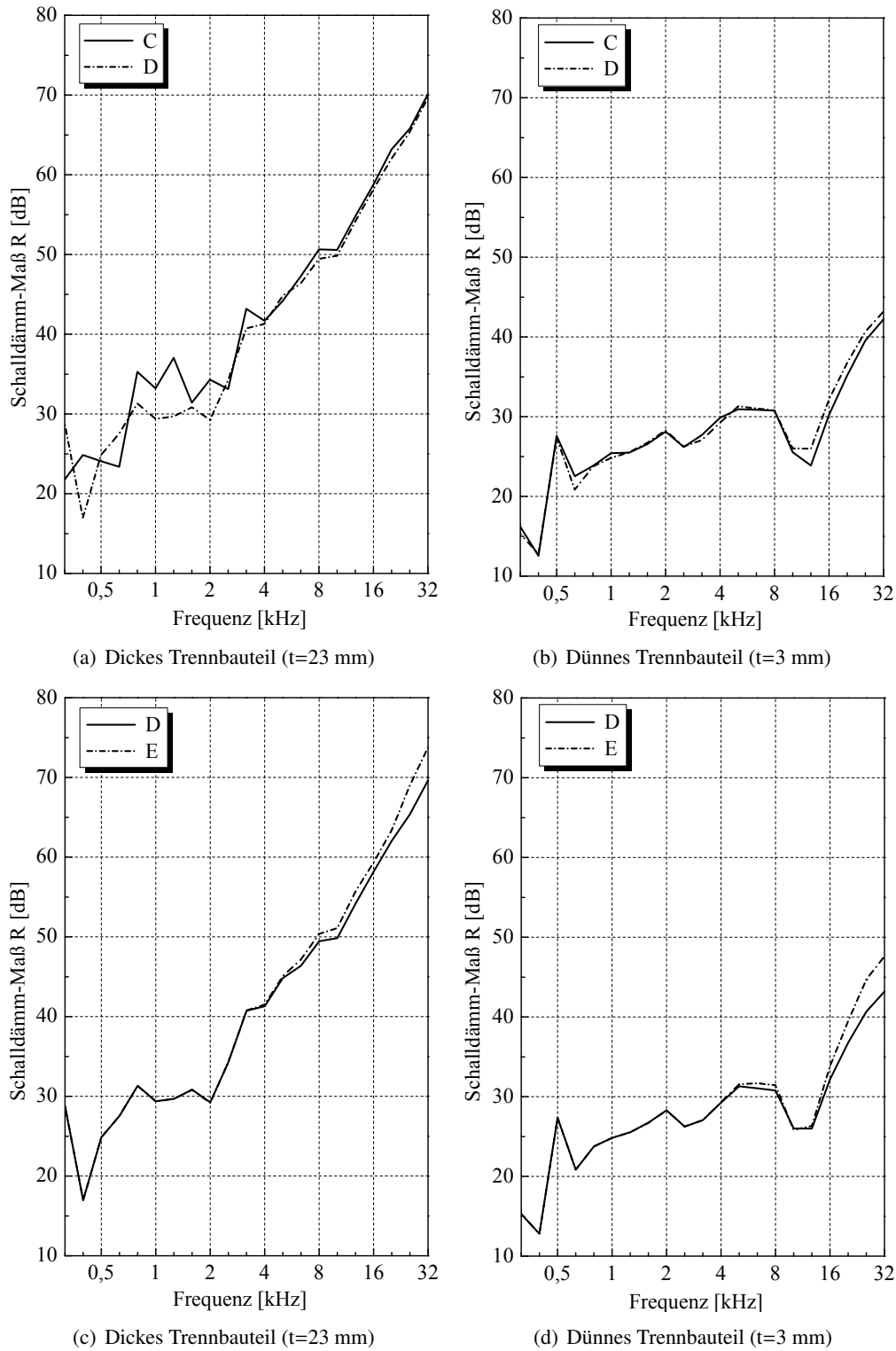


Abbildung 7.17: Schalldämm-Maß über der Frequenz. Simulationsergebnisse für das dünne und das dicke Trennbauteil für die Konfigurationen C, D und E nach Abbildung 7.15

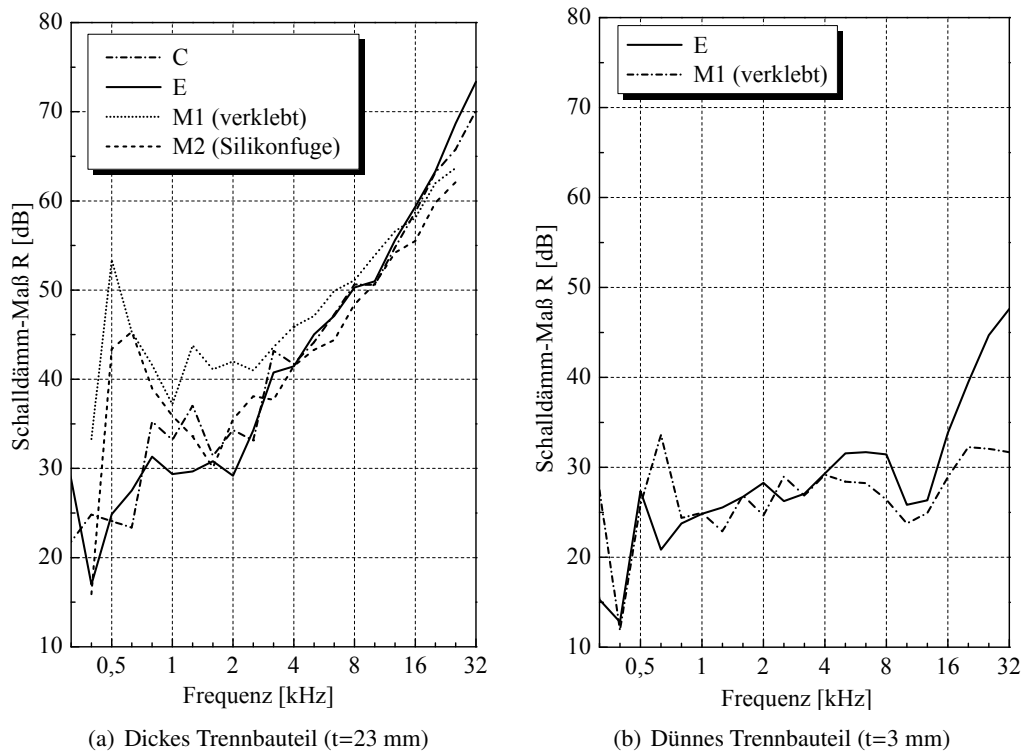


Abbildung 7.18: Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Messergebnissen der PTB für das dünne und das dicke Trennbauteil

besteht aus einer Silikonfuge, die das Trennbauteil elastisch mit dem flankierenden Bauteil verbindet. Diese Konfiguration wurde nur für das dicke Trennbauteil messtechnisch untersucht. In Abbildung 7.18(a) sind die Ergebnisse für das dicke Trennbauteil mit einer Dicke  $t$  von 23 mm zusammengestellt. Für das dicke Bauteil zeigen sich in Abbildung 7.18(a) deutliche Abweichungen für das ermittelte Schalldämm-Maß. Insbesondere im Bereich von 1 bis 4 kHz bricht das Schalldämm-Maß der mit Silikon an die flankierenden Bauteile angeschlossenen Wand gegenüber dem Schalldämm-Maß der verklebten Wand ein. Die Abweichungen betragen zum Teil mehr als 10 dB. Im Frequenzbereich von 0,5 bis etwa 2 kHz sind zudem sehr starke Abweichungen zwischen Messung und Simulation festzustellen. Im oberen Frequenzbereich ab etwa 4 kHz verringert sich der Unterschied zwischen den beiden Messkonfigurationen auf 2 bis 3 dB. Das Schalldämm-Maß der Konfiguration M2 liegt jedoch weiterhin unterhalb des Schalldämm-Maßes der Konfiguration M1. Das berechnete Schalldämm-Maß liegt in diesem Frequenzbereich zwischen den beiden gemessenen Kurven. Ab 16 kHz steigt das berechnete Schalldämm-Maß jedoch stärker als die beiden gemessenen Schalldämm-Maße an. Als mögliche Ursache für diese starken Abweichungen spielen mehrere Faktoren eine Rolle. Im Rahmen der Messungen war das Modell auf einem Tisch aufgebaut, der ebenfalls zu Schwingungen angeregt wird. Über diesen Weg kann zusätzlich Schallenergie abgeführt werden. Es liegen inzwischen Messungen vor, bei denen der Modellprüfstand auf Gummifüße gelagert wurde. Das für diesen Aufbau gemessene Schalldämm-Maß ist im Frequenzbereich unterhalb von etwa 2 kHz deutlich geringer. Des Weiteren ist die Abstrahlung von Schall in den Boden nicht im numerischen Modell erfasst. Dadurch könnte das Schalldämm-Maß im tiefen Frequenzbereich ebenfalls leicht ansteigen. Das eine gewisse Streuung um mehr als

10 dB selbst bei Messungen möglich sind, zeigen die Ergebnisse des Ringversuchs der PTB, die in Abbildung 2.8 dargestellt sind und in Abschnitt 2.1.2 diskutiert wurden.

Für das dünne Trennbauteil zeigt sich in Abbildung 7.20(b) über nahezu den gesamten betrachteten Frequenzbereich eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung. Im tiefen Frequenzbereich bei etwa 400 Hz ergibt sich für das dünne Trennbauteil sowohl für die Messung als auch für die Simulation ein Einbruch im Schalldämm-Maß. Das gemessene Schalldämm-Maß steigt danach bei rund 630 Hz bis auf rund 34 dB an. In der Simulation ist dieser starke Anstieg jedoch nicht zu beobachten. Danach sind in der Messkurve drei weitere leichte Einbrüche bei 1260 Hz, 2000 Hz sowie 3175 Hz zu erkennen. Diese Einbrüche sind in den Ergebnissen der Simulation nicht vorhanden. Für das dünne Trennbauteil lässt sich für die Konfiguration M1 in Abbildung 7.20(b) nach der Koinzidenzfrequenz ein konstantes Plateau für das Schalldämm-Maß beobachten. Dieses ungewöhnliche Verhalten konnte im Rahmen von Untersuchungen, die von der PTB durchgeführt wurden, auf einen Kurzschluss zwischen dem Lautsprecher und dem Mikrofon des Messaufbaus begründet werden. Daher steigt das Schalldämm-Maß oberhalb der Koinzidenzfrequenz nicht wie erwartet an.

#### 7.4.1 Dreidimensionales Modell

Exemplarisch sollen die Ergebnisse, die im vorherigen Abschnitt für die Konfiguration B berechnet wurden, mit den Ergebnissen eines dreidimensionalen Modells verglichen werden.

Das in Abbildung 7.1 dargestellte System wird mit insgesamt 54901 Elementen diskretisiert. Der Senderraum besteht aus 27807 Fluidelementen mit je 27 Knoten. Für den Empfangsraum werden 24955 Elemente des gleichen Typs verwendet. Das Prüfobjekt wird mit 713 DSG9 Elementen diskretisiert. Zudem wird die Kopplung der Teilgebiete über 1426 Kopplungselemente hergestellt. Die Diskretisierung ist in Abbildung 7.19 dargestellt. Das Modell besteht insgesamt aus 447111

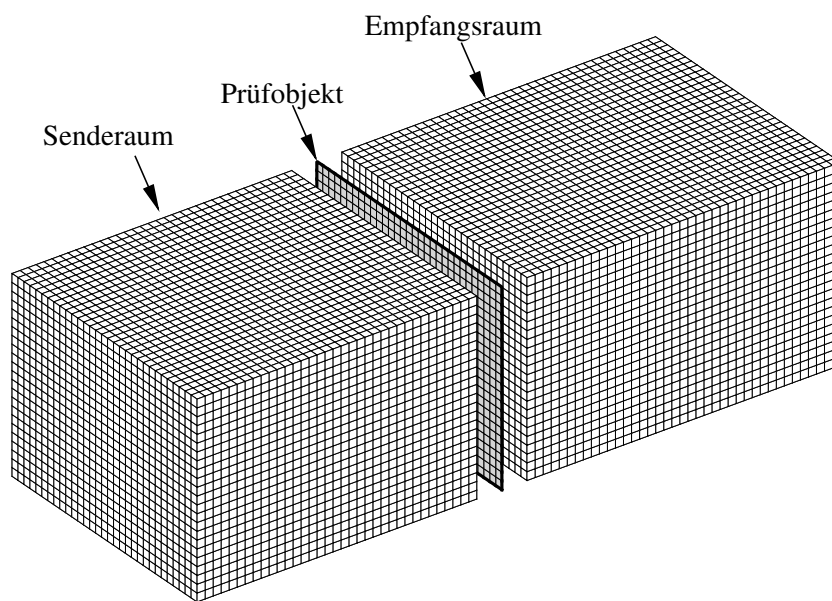


Abbildung 7.19: Dreidimensionales Modell zur Bestimmung des Schalldämm-Maßes.



Knoten. Die Anregung erfolgt analog zum zweidimensionalen Modell mit Hilfe von statistisch verteilten Punktschallquellen, über die gemittelt wird. Das Modell wird für einen Frequenzbereich von 281 bis 6219 Hz mit einer Schrittweite von 3 Hz analysiert. Die Gesamtrechenzeit auf 32 Opteron 246 CPUs beträgt rund 70 Stunden. Die Rechenzeit für das zweidimensionale Modell beträgt für 11973 berechnete Frequenzen rund 17 Stunden.

Das ermittelte Schalldämm-Maß für die Konfiguration B ist in Abbildung 7.20 sowohl für das dünne als auch das dicke Prüfobjekt dargestellt. Qualitativ ergibt sich sowohl für das dicke als

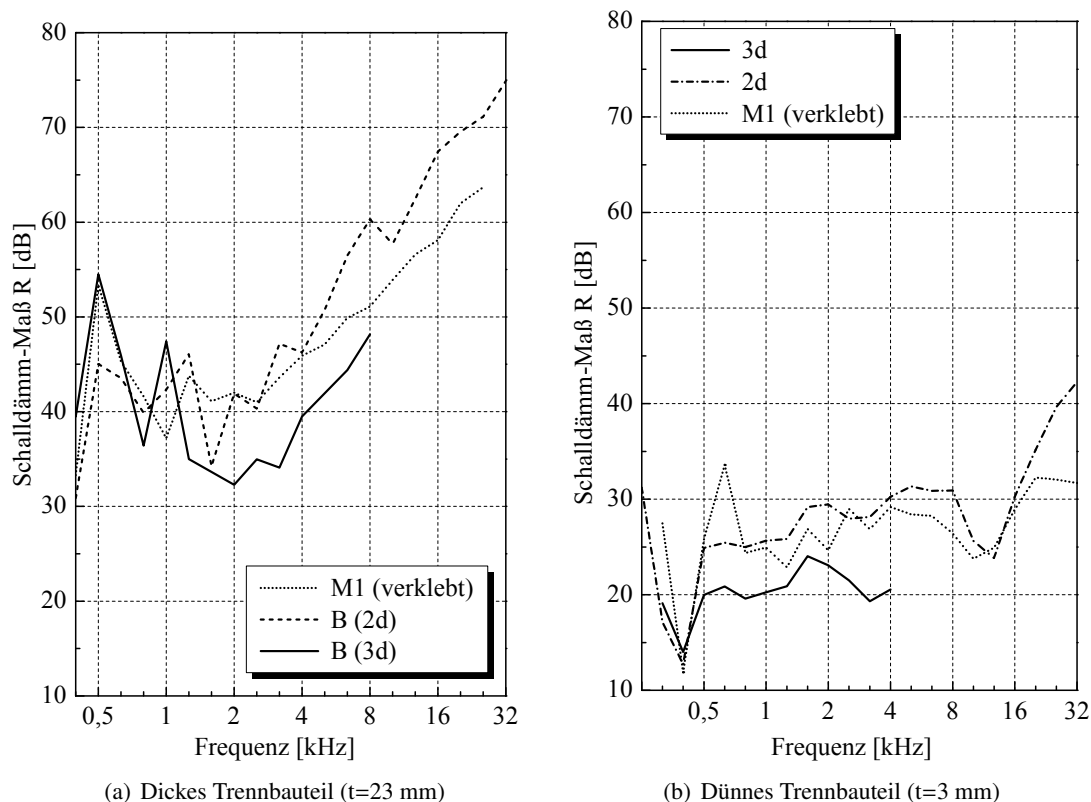


Abbildung 7.20: Vergleich der Simulationsergebnisse für Konfigurationen B mit den Messergebnissen der PTB

auch das dünne Prüfobjekt eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und dem zwei- bzw. dem dreidimensionalen Modell. Quantitativ sind jedoch zwischen dem zwei- und dem dreidimensionalen Modell starke Abweichungen zu beobachten, die zum Teil rund 10 dB betragen. Die für das dreidimensionale Modell ermittelte Schalldämmung liegt dabei im oberen Frequenzbereich stets unterhalb der für das zweidimensionale Modell ermittelten Schalldämmung. Dies liegt zum Einen an den unterschiedlichen Randbedingungen. Während das zweidimensionale Modell eine Platte abbildet, die nur an zwei gegenüberliegenden Rändern gelagert ist, sind im dreidimensionalen Modell sämtliche Ränder der Platte gelagert. Hier sind somit weitere Untersuchungen notwendig, um die starken Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen näher zu untersuchen. Insgesamt ist festzuhalten, dass die mit dem zweidimensionalen Modell berechneten Ergebnisse besser mit den Messungen übereinstimmen als die Ergebnisse der dreidimensionalen Simulation. Rein qualitativ werden jedoch in beiden Modellen die physikalischen Phänomene gut erfasst.

## 7.5 Längsdämmung flankierender Bauteile

In diesem Abschnitt soll nun die Längsdämmung flankierender Bauteile untersucht werden. Dabei soll geklärt werden, ob die Bestimmung der Schall-Längsdämmung in normalen Wandprüfständen erfolgen kann, bei denen der Einbau des Prüfobjekts seitlich parallel zur Außenwand des Prüfstands erfolgt. Durch diese Art des Einbaus entsteht ein künstliches Luftvolumen, das ggf. einen Einfluss auf das ermittelte Schall-Längsdämm-Maß hat. Der Aufbau des Modellprüfstandes, der im Folgenden betrachtet werden soll, wurde in Abschnitt 7.1.3 vorgestellt. Analog zu Abschnitt 7.4 wurden von der PTB Messungen an Modellprüfständen durchgeführt, die in [164] veröffentlicht wurden.

Untersucht werden drei Hohlraumtiefen von 50 mm, 100 mm und 250 mm. In die beiden kleineren Hohlräume wurde zur Erhöhung der Dämpfung zusätzliche Mineralwolle (MW) an der Außenwand des Prüfstandes eingebracht. Als Referenz wurde die Außenwand des Prüfstandes entfernt, so dass kein künstliches, abgeschlossenes Luftvolumen mehr vorhanden ist.

### 7.5.1 Messergebnisse

In den Abbildung 7.21 und 7.22 sind die Messergebnisse der PTB zusammengestellt. Für das Mo-

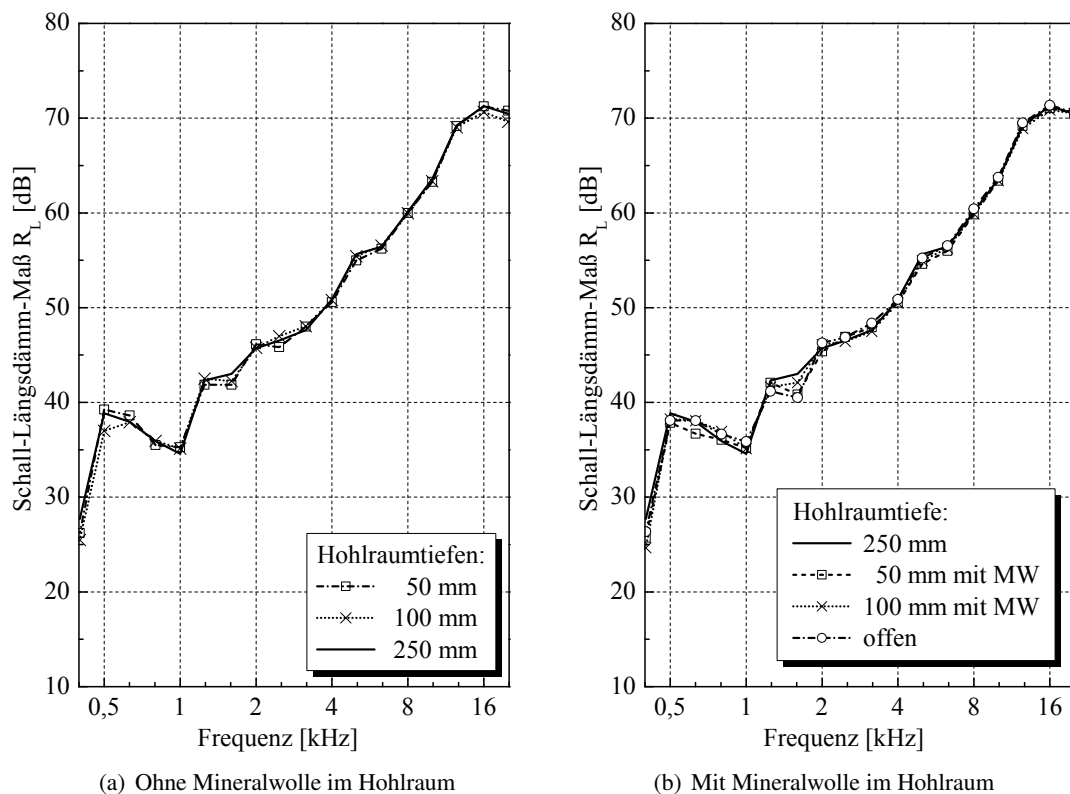


Abbildung 7.21: Gemessenes Schall-Längsdämm-Maß eines flankierenden Bauteils mit einer Dicke von 23 mm

dell mit dem dicken Prüfobjekt sind nur geringe Veränderungen in der Längsdämmung für die verschiedenen Konfigurationen festzustellen. Auch das zusätzliche Einbringen von Mineralwolle

hat keinerlei signifikanten Einfluss, wie Abbildung 7.21(b) zeigt. Nur für einige wenige Terzen zeigen sich kleinere Abweichungen von rund 2 dB, die keinerlei Systematik unterliegen. Für die tieferen Terzen sind leichte Abweichungen für die einzelnen Konfigurationen festzustellen, deren Herkunft im Rahmen der Untersuchungen der PTB nicht festgestellt werden konnte. Für diesen Frequenzbereich werden daher von der PTB weitere Untersuchungen empfohlen, bevor die Längsdämmung von Massivwänden in dieser Anordnung gemessen wird.

Anders verhält es sich hingegen für das 3 mm dicke Prüfobjekt, dass einer Leichtbauwand entspricht. Die Messergebnisse für die verschiedenen Konfigurationen sind in Abbildung 7.22 zusammengestellt. In der Längsdämmung sind drei Einbrüche zu erkennen. Ab rund 8 kHz ist der

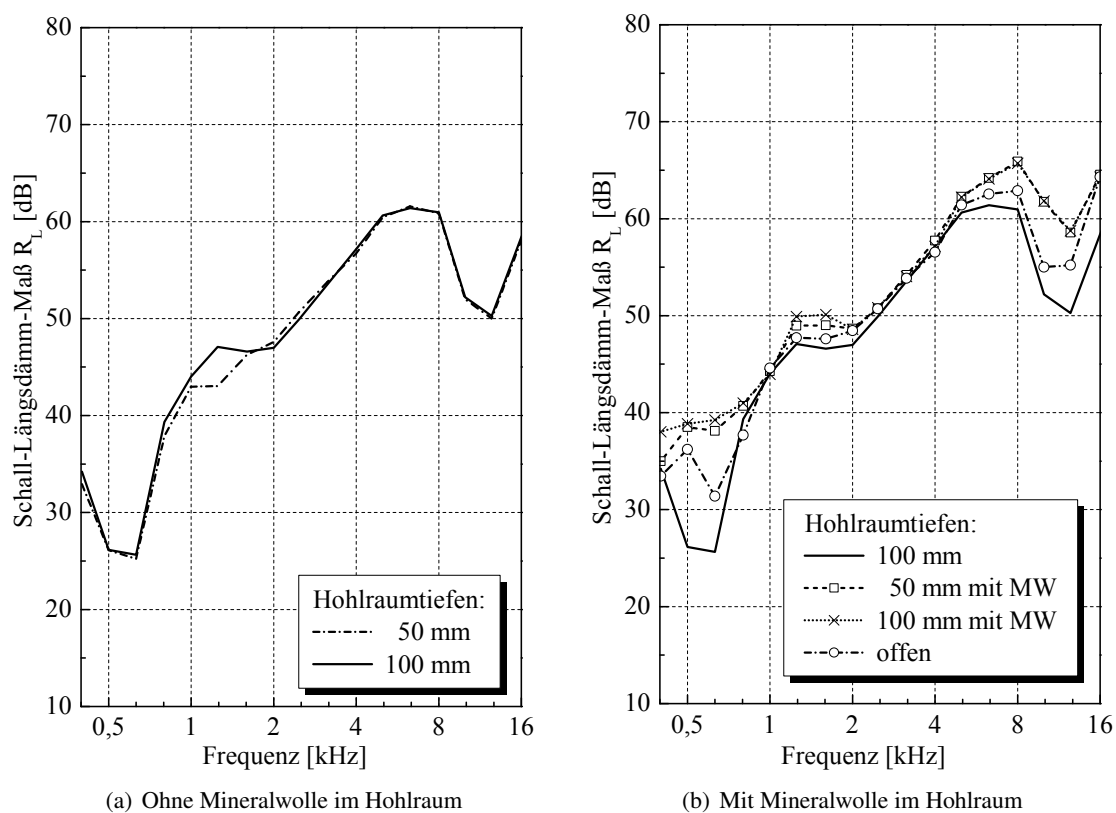


Abbildung 7.22: Gemessene Längsdämmung eines flankierenden Bauteils mit einer Dicke von 3 mm für (a) unterschiedliche Hohlraumtiefen sowie (b) mit zusätzlichem Absorbermaterial im Hohlraum und entfernter Prüfstandaußenwand (offen)

Koinzidenzbereich zu erkennen, die bei ca. 9,4 kHz einsetzt. Die beiden anderen Einbrüche bei 500 Hz und 625 Hz sowie 1,25 kHz und 1,6 kHz lassen sich auf Luftschallmoden im Luftvolumen zurückführen. Die Tiefe der drei zuvor genannten Einbrüche hängt maßgeblich vom Aufbau des Hohlraumes ab. Selbst für das geöffnete System ermöglichen die den Außenraum begrenzenden feststehenden Wände die Ausbildung von Luftschallmoden. Wird die Außenwand zusätzlich eingefügt, wird das Austreten von Schallenergie verhindert. Dadurch wird mehr Schallenergie in den Empfangsraum übertragen, die Dämmung sinkt. Durch Dämpfung des Luftschallfeldes mittels Einbringen von Mineralwolle in den Hohlraum wird ein Teil der Schallenergie dissipiert. Dadurch wird der Einbruch in den drei Bereichen ausgeglichen. Dieses Verhalten lässt sich sowohl für ein

Hohlraum von 50 mm als auch für einen Hohlraum von 100 mm Tiefe beobachten. Zusammenfassend kann aufgrund der durchgeführten Messungen festgestellt werden, dass das Prüfobjekt einer sehr genauen Festlegung bedarf, da ansonsten die Körperschallübertragung über das Prüfobjekt nicht vergleichbar ist. Zudem hat das Luftvolumen zwischen der Prüfstandseitenwand und dem Prüfobjekt mit kleiner werdender Hohlraumtiefe einen immer größer werdenden Einfluss auf die Längsdämmung. Dies gilt insbesondere für leichte, dünne Prüfobjekte. Durch das Einbringen von Dämmstoffen kann dieser Einfluss jedoch kompensiert werden. Somit ist neben der Geometrie des Prüfstands auch die Art und Positionierung von Dämmmaterial im Luftvolumen festzulegen um die Vergleichbarkeit von verschiedenen Messungen sicherzustellen.

### 7.5.2 Simulationsergebnisse

Zunächst wird ein zweidimensionales Modell untersucht, um auch hier den analysierbaren Frequenzbereich zu erweitern. Die Anregung erfolgt durch Schallquellen an den Lautsprecherpositionen der Messung. Zur Berechnung der Längsdämmung werden die Ergebnisse für die einzelnen Positionen der Lautsprecher gemittelt. Im mechanischen Modell wird durch die gewählte Diskretisierung sichergestellt, dass keine Schallübertragung vom Senderaum über das Trennbauteil in den Empfangsraum erfolgen kann. Das verwendete mechanische Modell ist in Abbildung 7.23 in Grundriss skizziert. Sämtliche Übertragungswege über Decken, Fußböden etc. sind ausgeschlos-

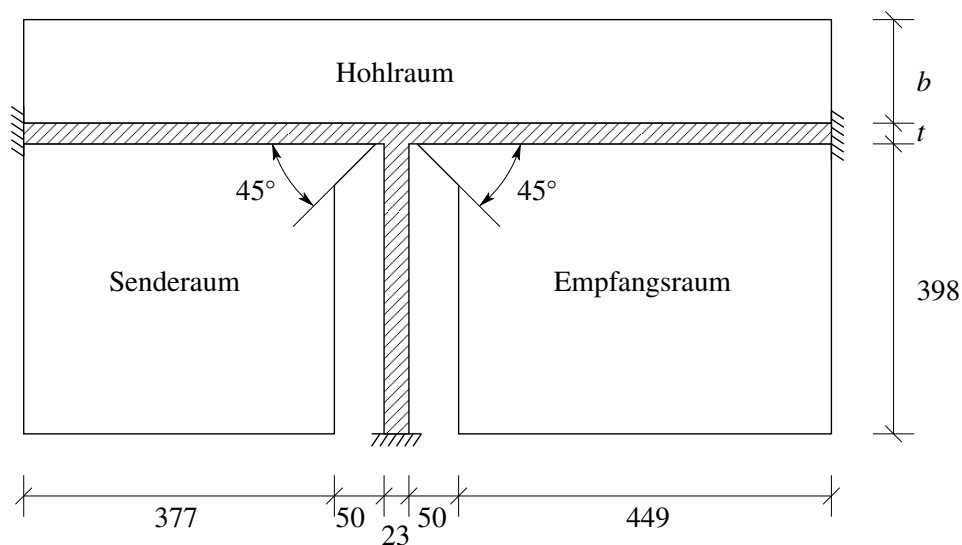


Abbildung 7.23: System zur Untersuchung der Längsdämmung flankierender Bauteile. Alle Abmessungen in [mm]

sen, so dass die Schallübertragung nur über das flankierende Bauteil erfolgen kann. Die in den Hohlraum eingebrachte Mineralwolle wird über eine Impedanzrandbedingung im numerischen Modell berücksichtigt, die über den von der Physikalisch Technischen Bundesanstalt gemessenen Reflexionsfaktor, der in Abbildung 7.24 dargestellt ist, berechnet werden kann. Aufgrund der Abmessungen des zur Messung verwendeten Kundtschen Rohres konnten nur Werte bis 4500 Hz bestimmt werden. Im Rahmen der Berechnung wurde für Frequenzen, die größer als 4500 Hz sind, der Reflexionsfaktor extrapoliert.

In Abbildung 7.25 sind die Simulationsergebnisse für das dicke Prüfobjekt ( $t=23$  mm) für unterschiedliche Konfigurationen dargestellt. Die Simulationsergebnisse zeigen ein ähnliches Verhal-

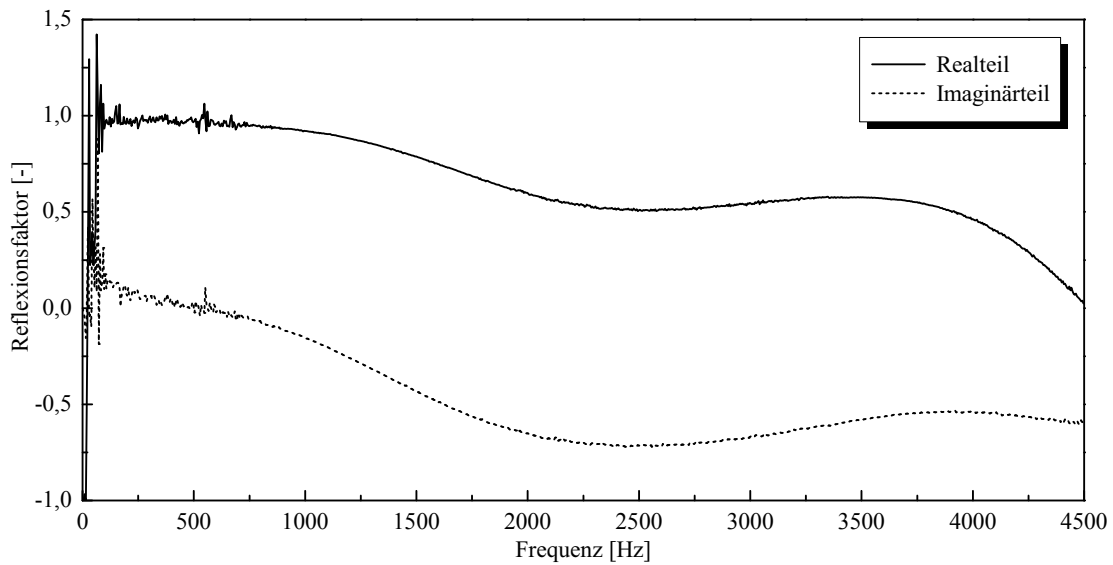


Abbildung 7.24: Real- und Imaginärteil des von der Physikalisch Technischen Bundesanstalt für Mineralwolle gemessenen Reflexionsfaktors über der Frequenz

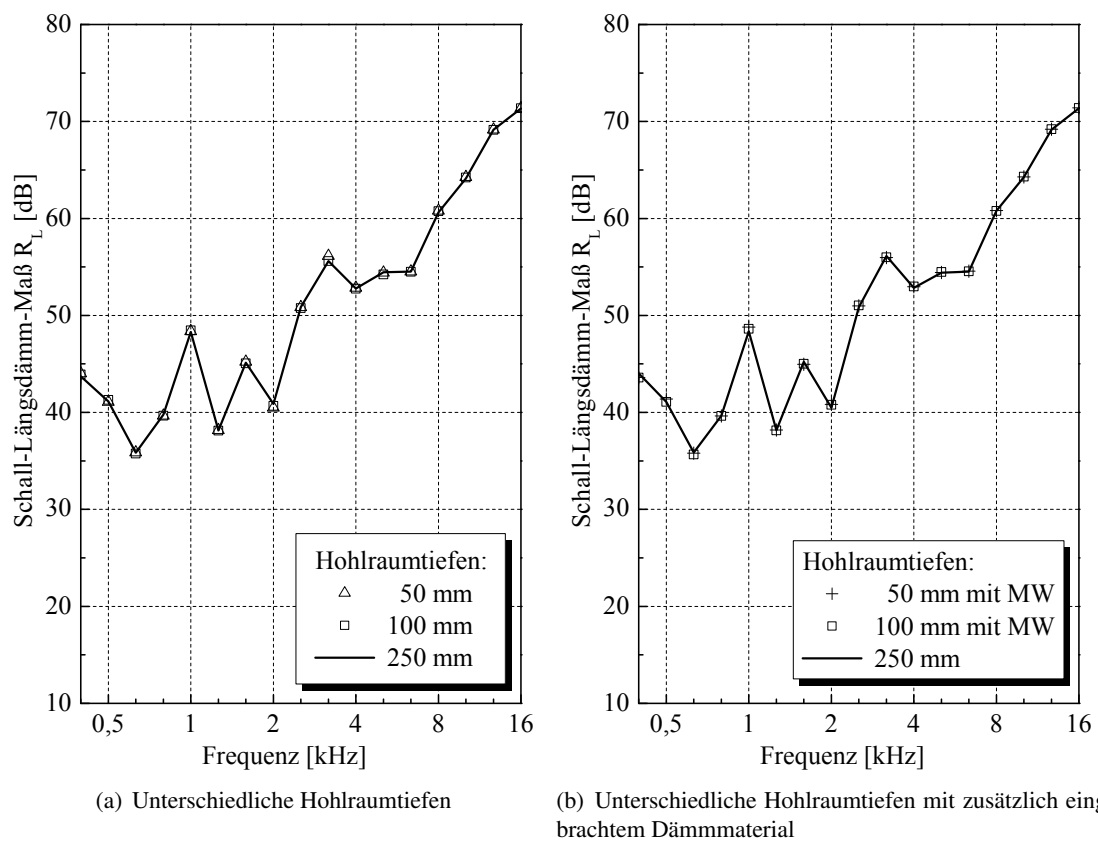
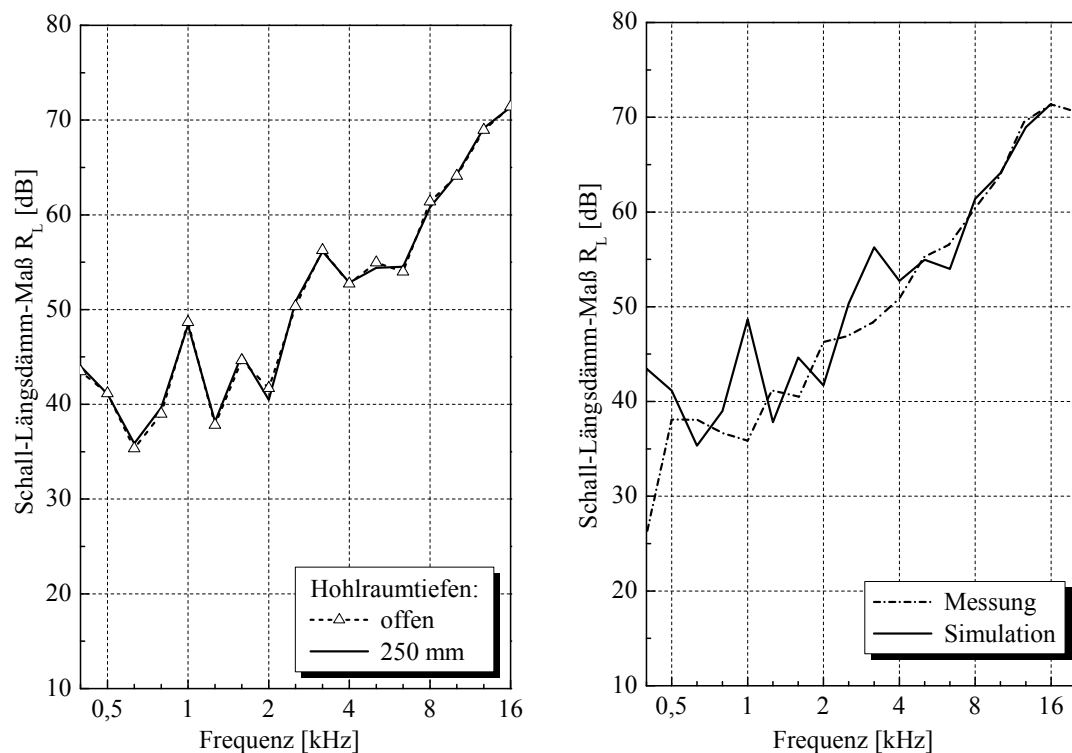


Abbildung 7.25: Schall-Längsdämm-Maß des dicken Prüfobjekts ( $t=23$  mm) für (a) unterschiedliche Hohlraumtiefen sowie (b) in den Hohlraum eingebrachter Mineralfaserdämmung

ten wie die Messergebnisse. Für dieses Prüfobjekt zeigen sich über den gesamten hier betrachteten Frequenzbereich keinerlei Unterschiede für die verschiedenen Hohlraumtiefen  $b$ . Auch der Einfluss von in den Hohlraum eingebrachtem Dämmmaterial ist für dieses Prüfobjekt vernachlässigbar. Wie in Abbildung 7.26(a) zu erkennen ist, hat auch das Entfernen der Außenwand des Prüfstands keinerlei Einfluss auf das berechnete Schall-Längsdämm-Maß. Es sind nur vereinzelt sehr kleine Abweichungen, die geringer als 0,5 dB sind, zu erkennen. Für diese Konfiguration, bei



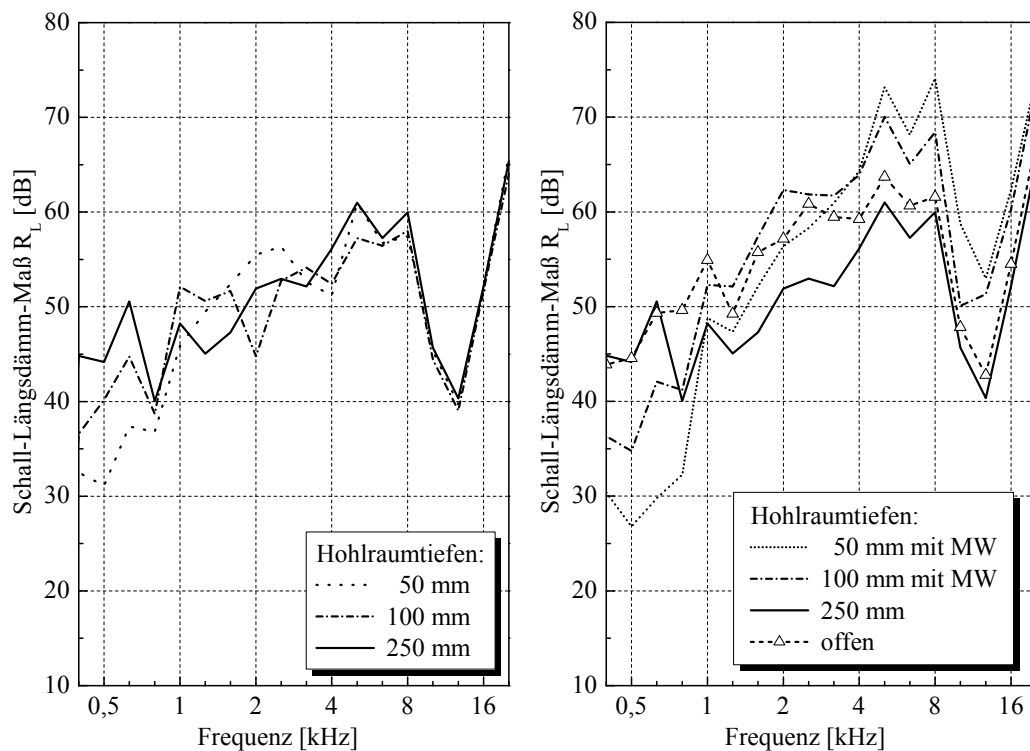
(a) Schall-Längsdämm-Maß für einen 250 mm tiefen Hohlraum sowie einen Prüfstand ohne Außenwand (b) Vergleich von Messung und Simulation (offene Konfiguration)

Abbildung 7.26: Schall-Längsdämm-Maß des dicken Prüfobjekts ( $t=23$  mm)

der die Prüfstandaußenwand entfernt wurde, sind in Abbildung 7.26(b) die Ergebnisse von Messung und Simulation gegenübergestellt. Während das gemessene Schall-Längsdämm-Maß über den gesamten betrachteten Frequenzbereich nur sehr kleine Einbrüche aufweist, sind für das gemessene Schall-Längsdämm-Maß deutlich größere Einbrüche zu erkennen wie z.B. bei 630 Hz, 1250 Hz oder auch 2000 Hz. Auch im Frequenzbereich über 2000 Hz sind im berechneten Schall-Längsdämm-Maß Resonanzen zu erkennen während die Messkurve hier nahezu keinerlei Einbrüche aufweist. Insbesondere im tiefen Frequenzbereich bis etwa 2000 Hz liegt das berechnete Schall-Längsdämm-Maß über den gemessenen Werten. Ab etwa 4 kHz stimmen die gemessenen und die berechneten Werte gut überein. Insgesamt ist also festzuhalten, dass analog zu den Messungen, der Einfluss des Hohlraums für das dicke Prüfobjekt, das einer Wand in Massivbauweise entspricht, der Einfluss des Hohlraums vernachlässigbar ist. Die unterschiedlichen Konfigurationen weisen nur sehr leichte Abweichungen zueinander auf, die in der Regel vernachlässigbar sind. Auch der Einbau zusätzlichen Dämmmaterials führt zu keiner signifikanten Änderung der Ergeb-

nisse.

Die für das dünne Prüfobjekt ( $t=3$  mm), welches einer Leichtbauwand entspricht, berechneten Ergebnisse sind in Abbildung 7.27 dargestellt. Anders als für das zuvor betrachtete Prüfobjekt



(a) Schall-Längsdämm-Maß für drei unterschiedliche Hohlraumtiefen  
(b) Schall-Längsdämm-Maß für drei unterschiedliche Hohlraumtiefen mit in den Hohlraum eingebrachter Mineralfaserdämmung sowie entfernter Prüfstandaußenwand

Abbildung 7.27: Schall-Längsdämm-Maß des dünnen Prüfobjekts ( $t=3$  mm)

mit einer Dicke von 23 mm sind für dieses Prüfobjekt signifikante Abweichungen im Schall-Längsdämm-Maß für die einzelnen Konfigurationen zu erkennen. Für die drei betrachteten unterschiedlichen Hohlraumtiefen  $b$  zeigen sich in Abbildung 7.27(a) insbesondere im tiefen Frequenzbereich deutliche Unterschiede. Bis etwa 1000 Hz ergibt sich für größer werdende Hohlraumtiefen ein besseres Schall-Längsdämm-Maß. Von 1 bis 8 kHz ergibt sich ein uneinheitliches Bild. Für eine Hohlraumtiefe von 100 mm ist bei 2 kHz ein starker Einbruch zu erkennen, der in den übrigen Konfigurationen nicht auftritt. Bei rund 4 kHz ist für alle Konfigurationen ein weiterer Einbruch zu erkennen, der jedoch für eine Hohlraumtiefe von 250 mm nicht stark ausgeprägt ist. Im Frequenzbereich über 8 kHz ist kein signifikanter Unterschied für die verschiedenen Konfigurationen zu erkennen. Unterhalb von 8 kHz hat jedoch die Tiefe des Hohlraums einen großen Einfluss auf die Ergebnisse. In Abbildung 7.27(b) ist als Referenzwert das Schall-Längsdämm-Maß der Konfiguration mit einer Hohlraumtiefe von 250 mm dargestellt. Im tiefen Frequenzbereich bis etwa 1 kHz liegt das Schall-Längsdämm-Maß der Konfigurationen, die zusätzlich Mineralwolle im Hohlraum enthalten, unter dieser Referenzkurve. Ab 1 kHz liegen die berechneten Werte für diese Konfigurationen jedoch rund 5 bis 10 dB über der Referenzkurve. Bis 4 kHz ist das Schall-

Längsdämm-Maß der Konfiguration mit einer Hohlraumtiefe von 100 mm deutlich besser als das der Konfiguration mit einer Hohlraumtiefe von 50 mm. Im Bereich von 4 bis 16 kHz jedoch ergibt sich für die Konfiguration mit den kleineren Hohlraum ein besseres Schall-Längsdämm-Maß. Für die Konfiguration mit einer Hohlraumtiefe von 250 mm liegen die berechneten Werte ab 1 kHz stets unterhalb der Werte der übrigen Konfigurationen. Das Schall-Längsdämm-Maß der Konfiguration ohne Prüfstandaußenwand (offen) liegt im tiefen Frequenzbereich oberhalb der übrigen Konfigurationen. Bei 1,2 kHz zeigt sich ein Einbruch, ab dem die Werte für diese Konfiguration unterhalb der Werte der Konfigurationen mit Mineralwolle im Hohlraum liegen. Ebenso wie für die drei übrigen Konfigurationen ist ein sehr starker Einbruch von rund 20 dB bei etwa 11 kHz zu beobachten. Oberhalb dieser Frequenz steigen sämtliche Kurven stark an. Der Vergleich von Messung und Simulation erfolgt exemplarisch für zwei ausgewählte Konfigurationen, deren gemessene bzw. berechnete Schall-Längsdämm-Maße in Abbildung 7.28 dargestellt sind. In Abbildung

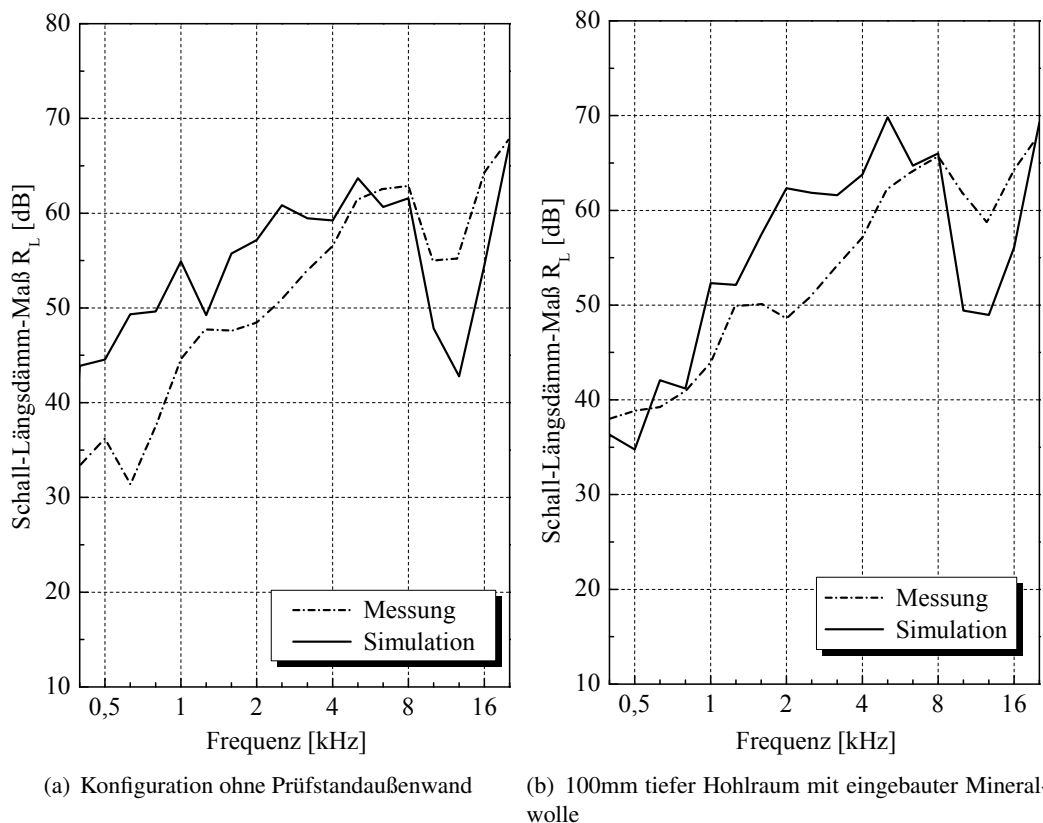


Abbildung 7.28: Schall-Längsdämm-Maß des dünnen Prüfobjekts ( $t=3$  mm); Vergleich von Messung und Simulation für zwei ausgewählte Konfigurationen

7.28(a) sind die Ergebnisse für die Prüfstandkonfiguration mit entfernter Außenwand gegenübergestellt. Im tiefen Frequenzbereich bis etwa 4 kHz ist das berechnete Schall-Längsdämm-Maß stets größer als der gemessene Wert. Danach ist jeweils ein sehr starker Einbruch im Verlauf zu erkennen, der für die Messung geringer als in der Simulation ausfällt. Oberhalb der Resonanz steigen dann beide Kurven stark an. Im Rahmen der Simulation ist zudem eine zusätzliche Resonanz bei 1200 Hz zu beobachten, die in der Messung nicht auftritt. In der Messung ist jedoch ein Einbruch bei 500 Hz zu erkennen. Für die zweite untersuchte Konfiguration ergibt sich in Abbildung



7.28(b) ein ähnlicher Verlauf, wobei auch für diesen Fall das gemessene Schall-Längsdämm-Maß einen glatteren Verlauf mit weniger Einbrüchen aufweist als die berechnete Kurve. Auch hier ist für beide Systeme der Einbruch oberhalb von 8 kHz zu erkennen, der wiederum in der Simulation stärker ausgeprägt ist als in der Messung. Im mittleren Frequenzbereich wird der gemessene Wert von der Simulation deutlich überschätzt, teilweise um bis zu 10 dB. Qualitativ stimmen jedoch Messung und Simulation gut überein. So zeigt sich hier analog zu den Messungen das Phänomen, dass die Längsdämmung für die Konfiguration mit einer Hohlraumtiefe von 50 mm und zusätzlich in den Hohlraum eingebrachtem Dämmmaterial besser ist als für die Konfiguration, bei der die Außenwand des Prüfstand entfernt und somit kein Hohlraum vorhanden ist. Um genauere quantitative Aussagen treffen zu können, sind weitere Untersuchungen nötig. So ist z.B. der Einfluss der in den Außenraum überstehenden Wände und Decken zu klären, die im Rahmen der Messung bei der Konfiguration ohne Außenwand auftreten. Dass die Simulation das Schalldämm-Maß überschätzt könnte durch Nebenwege, die im Rahmen der Messung ggf. nicht vollständig unterdrückt werden konnten, zu begründen sein, die einen zusätzlichen Beitrag zur Schallübertragung leisten. Im Rahmen der Simulation ist diese Übertragung über Nebenwege vollständig aus dem Modell eliminiert.

### 7.5.3 Vergleich mit einem dreidimensionalen Modell

Im folgenden Abschnitt sollen die Ergebnisse, die am zweidimensionalen Modell berechnet wurden, mit Simulationsergebnissen eines dreidimensionalen Gebiets verglichen werden. Die verwendete Diskretisierung ist in Abbildung 7.29 dargestellt. Sowohl für die Diskretisierung der Struktur

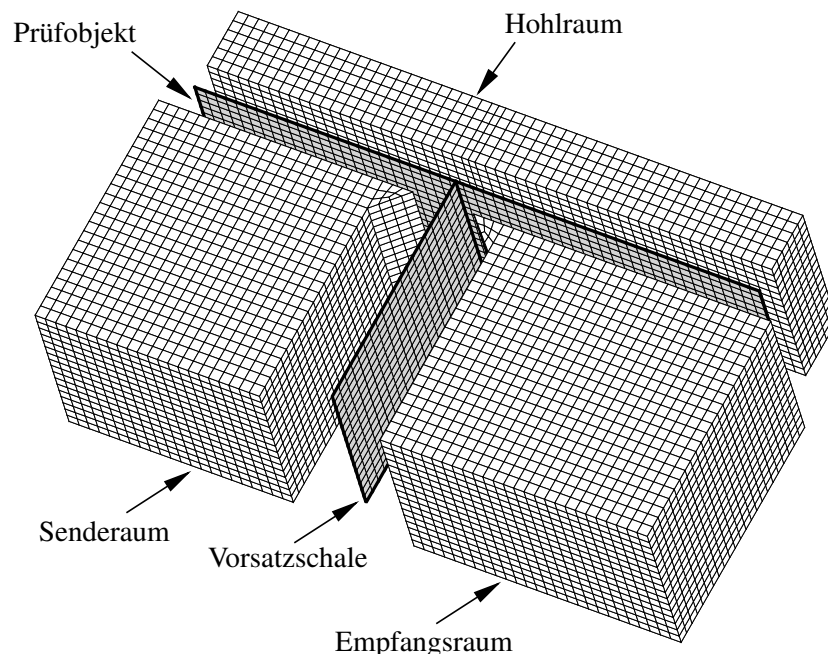


Abbildung 7.29: Dreidimensionales Modell zur Untersuchung der Längsdämmung flankierender Bauteile. Die Hohlraumtiefe  $b$  beträgt 100 mm.

als auch die Diskretisierung der Fluidgebiete werden Elemente mit quadratischen Ansätzen ver-

wendet. Die Anzahl der verwendeten Elemente ist in Tabelle 7.3 zusammengestellt. Der betrachte-

Gebiet	Elemente
Senderraum	8738 Hex27
Empfangsraum	10302 Hex27
Hohlraum	5712 Hex27
Prüfobjekt	952 DSG9
Vorsatzschale	340 DSG9

Tabelle 7.3: Elementstatistik der Diskretisierung in Abbildung 7.29

te Frequenzbereich erstreckt sich von 89 bis 4665 Hz und wird mit 3 Hz abgetastet. Als Anregung wurden Punktschallquellen gewählt. Die Rechenzeit für dieses Modell betrug auf 32 Opteron Prozessoren rund 38 Stunden.

In Abbildung 7.30 sind die Schall-Längsdämm-Maße für die beiden untersuchten Prüfobjekt-dicken zusammengestellt. Als Referenz sind die Lösungen des zweidimensionalen Modells angegeben, die bereits in Abschnitt 7.5.2 vorgestellt wurden. Insbesondere für das dickere Prüfobjekt

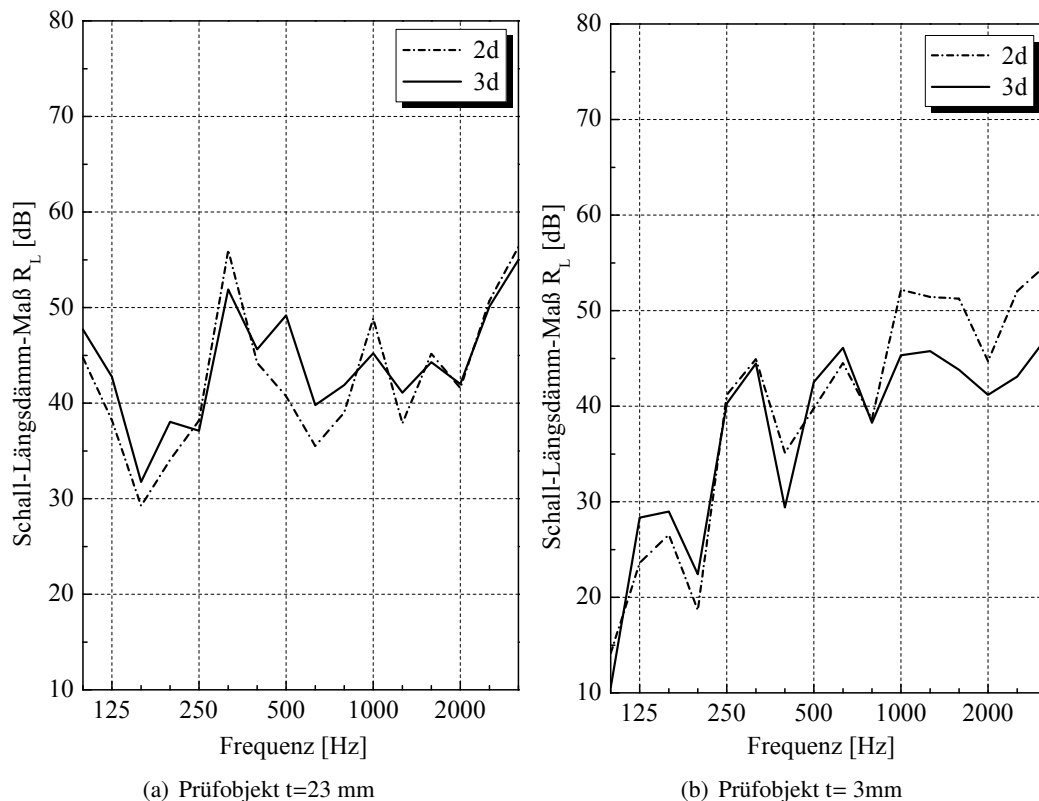


Abbildung 7.30: Vergleich der Ergebnisse für das zwei- und das dreidimensionale Modell zur Bestimmung der Längsdämmung für zwei Prüfobjekte mit unterschiedlicher Dicke.

stimmen die Ergebnisse über den gesamten Frequenzbereich gut überein. Lediglich im Bereich um 500 Hz sind stärkere Abweichungen zu erkennen. Für das dünne Prüfobjekt weichen die er-

mittelten Schall-Längsdämm-Maße insbesondere im oberen Frequenzbereich ab 1 kHz stärker voneinander ab. Diese Abweichungen betragen rund 5 bis 8 dB. Insgesamt stimmen aber auch für dieses Prüfbjekt die beiden Modelle qualitativ sehr gut überein. Quantitativ sind diesbezüglich insbesondere für das dünne Prüfbjekt im oberen Frequenzbereich Einschränkungen zu machen. In Abbildung 7.31 sind die für das dreidimensionale Modell berechneten Schall-Längsdämm-Maße den Messergebnissen der PTB gegenübergestellt. Allerdings ist ein Vergleich mit den Mes-

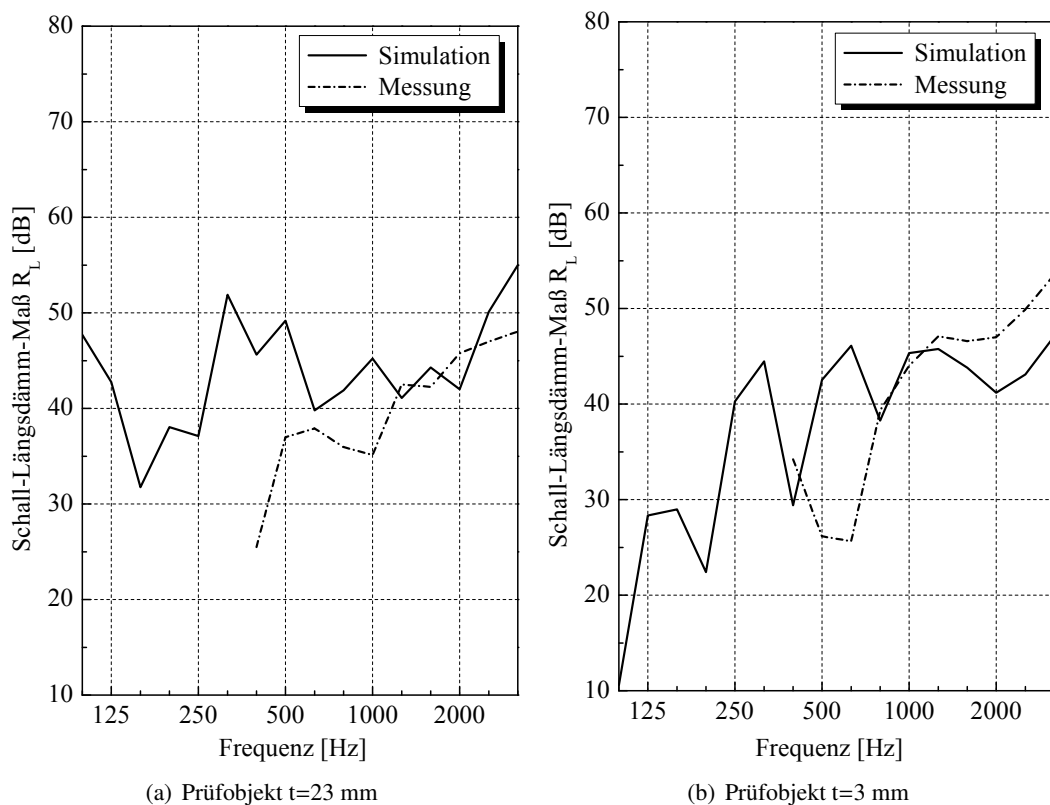


Abbildung 7.31: Vergleich von Messung und Simulation für das dreidimensionale Modell für zwei Prüfbjekte mit unterschiedlicher Dicke. Die Hohlraumtiefe  $b$  beträgt 100 mm.

sungen der PTB nur eingeschränkt möglich, da insbesondere im tiefen Frequenzbereich die Messgenauigkeit nicht uneingeschränkt gegeben ist. Im oberen hier betrachteten Frequenzbereich zeigen sowohl Messung als auch Simulation qualitativ ähnliche Verläufe. Für einen besseren Vergleich ist der Frequenzbereich des dreidimensionalen Modells weiter nach oben zu erweitern. Dadurch würde jedoch der numerische Aufwand drastisch erhöht, so dass im Rahmen dieser Arbeit der betrachtete Frequenzbereich für das dreidimensionale Modell auf maximal 4000 Hz begrenzt wurde.

Insgesamt ist festzuhalten, dass die Längsdämmung flankierender Bauteile mit dem vorgestellten numerischen Modell untersucht werden kann. Die in den Messungen beobachteten physikalischen Phänomene werden durch das Verfahren abgebildet. Durch Berücksichtigung weiterer Dämpfungsmechanismen wie z.B. einer detaillierten Untersuchung der Verbindung von Prüfbjekt und der Wand hinter der Vorsatzschale oder ggf. auch genauere Materialparameter könnte die Güte der quantitativen Prognose weiter erhöht werden.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit ist ein Berechnungsverfahren zur Simulation der bauakustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen vorgestellt worden. Diese bauakustischen Eigenschaften, die für die schallschutztechnische Auslegung von Gebäuden benötigt werden, können mit Hilfe des vorgestellten Modells in erster Näherung bestimmt werden.

Nach einer kurzen Übersicht über die Normen, die die gesetzliche Grundlage für die schallschutztechnische Auslegung von Gebäuden bilden, wird das physikalische Modell vorgestellt, das zur Beschreibung der Problemstellung dient. Das vorgestellte Transmissionsmodell, dass die Schwingungsanregung eines plattenförmigen Bauteils sowie die Abstrahlung von Schall durch die schwingende Platte in angrenzende finite und infinite Fluide umfasst, wird durch verschiedene Diskretisierungsmethoden numerisch umgesetzt. Dabei werden auch die komplexen Wechselwirkungen der einzelnen Teilgebiete untereinander sowie die Dämpfungsmechanismen innerhalb der einzelnen Teilgebiete im Modell berücksichtigt und in der Folge gezielt untersucht.

Die differentielle Problembeschreibung für die elastische Struktur sowie die finiten Fluidgebiete wird mit Hilfe der Finiten Elemente Methode gelöst. Dabei werden die numerischen Vorteile der FEM wie die Bandstruktur sowie die Symmetrie der Systemmatrix bei der Lösung des Gleichungssystems ausgenutzt. Zur weiteren Effizienzsteigerung des implementierten FE-Lösers wurden frei verfügbare Bibliotheken verwendet, die optimierte Verfahren zur Lösung der aus der Diskretisierung resultierenden Gleichungssysteme bereitstellen. Zudem arbeiten diese Bibliotheken auf Distributed Memory Systemen, wodurch die Parallelisierung des Lösers und somit die Ausnutzung der Vorteile paralleler Rechnerarchitekturen problemlos möglich wird.

Bei der Untersuchung von mehrschaligen Wandkonstruktionen sind häufig Schichten aus porösen absorbierenden Materialien wie Glas- oder Steinwolle zu berücksichtigen. Derartige Materialien können im vorgestellten Berechnungsmodell entweder durch einen äquivalenten Fluidansatz oder als dreidimensionales poroelastisches Kontinuum, das auf dem Modell nach Biot basiert, modelliert werden. Durch Verwendung derartiger Modelle können mehrschalige Wandaufbauten, wie sie häufig in der Baupraxis zur kostengünstigen Verbesserung der Schalldämmung verwendet werden, effizient modelliert und analysiert werden.

Um den betrachtbaren Frequenzbereich zu erweitern sowie die benötigte Rechenzeit signifikant zu reduzieren, wird ein zweidimensionales Modell entwickelt. Mit Hilfe dieses Modells können in erster Näherung qualitative Aussagen zum Dämmungsverhalten von trennenden und flankierenden Bauteilen gemacht werden.

Im Rahmen der Untersuchung der Schallübertragung durch flankierende Bauteile sind im Modell infinite Fluidgebiete zu berücksichtigen. An den Rändern dieser Gebiete ist die Sommerfeldsche Abstrahlungsbedingung zu erfüllen, die im Modell mit der Randelementmethode oder der *Scaled Boundary Finite Element Method* realisiert werden kann.

Nachdem das vorgestellte numerische Modell an zahlreichen Testbeispielen verifiziert wird, werden verschiedene Anwendungsbeispiele betrachtet. Im ersten Schritt wird der Einfluss der Fluiddämpfung untersucht. Wie zu erwarten war, hat diese Dämpfung erst für sehr hohe Frequenzen einen signifikanten Einfluss auf das Simulationsergebnis. Dies lässt sich wohl für die Schall- als auch die Längsdämmung von Bauteilen feststellen.

Trennwände, die einen mit Füllmaterial ausgestatteten zweischaligen Aufbau besitzen, haben eine sehr hohe Relevanz in der Baupraxis. Daher wird der Einfluss von unterschiedlichen Füllmaterialien, die in den Zwischenraum einer zweischaligen Wand aus Gipskartonplatten eingebracht wurden, untersucht. Es ist festzuhalten, dass der längenbezogene Strömungswiderstand den größten Einfluss auf das Schalldämm-Maß hat. Die übrigen Parameter, die zur Beschreibung poröser Füllstoffe verwendet werden, haben dagegen einen deutlich geringeren Einfluss.

Die Übertragung von Schall über flankierende Bauteile ist für praxisübliche Bauwerke nicht vernachlässigbar. Der Einfluss dieser Bauteile auf das Schalldämm-Maß wird daher im Rahmen dieser Arbeit eingehend betrachtet. Durch Berücksichtigung der flankierenden Wände im numerischen Modell reduziert sich das ermittelte Schalldämm-Maß über einen weiten Frequenzbereich signifikant. Eine Entkopplung des Prüfobjekts von den flankierenden Wänden durch Einbringen einer Silikonfuge führte zu einer erkennbaren Verbesserung der Schalldämmung. Da in realen Prüfständen die Schallübertragung über sämtliche flankierenden Bauteile durch den Einbau von Fugen verhindert wird, können im unteren Frequenzbereich die Abweichungen in den Ergebnissen des Ringversuchs, der von der PTB koordiniert wurde, auf Dämpfungsphänomene zurückgeführt werden. Die zuvor erwähnten Fugen werden mit Füllmaterialien verschlossen, die eine direkte Übertragung von Körperschall verhindern sollen. Dadurch wird jedoch eine Verbindung unter den einzelnen Bauteilen hergestellt, die im Gegensatz zu den restlichen Baumaterialien, die zur Herstellung des Prüfstandes verwendet werden, nur sehr schwer in einem numerischen Modell zu berücksichtigen ist. Die Bestimmung der genauen Materialparameter des Füllstoffes führt zu ähnlichen Problemen wie für das Silikon, dessen identifizierte Parameter ebenfalls nur als erste Näherung dienen können.

Nach DIN EN 12354 ist die Längsdämmung flankierender Bauteile zu bestimmen. Da viele Prüfeinrichtungen nicht über geeignete Prüfstände verfügen, werden die Prüfobjekte häufig seitlich parallel zur Außenwand eines gewöhnlichen Wandprüfstandes eingebaut. Dadurch entsteht ein Hohlraum, der einen signifikanten Einfluss auf das Schall-Längsdämm-Maß des Prüfobjekts haben könnte. Der Einfluss eines solchen Hohlraums wird daher eingehend studiert. Für massive Trennwände scheint der Einfluss dieses Hohlraumes vernachlässigbar gering. Dies geht sowohl aus Messungen der PTB als auch den Simulationsergebnissen hervor. Anders stellt sich die Situation für dünne Prüfobjekte dar, die einer Leichtbauwand entsprechen. Hier ist ein deutlicher Einfluss der gewählten Hohlraumtiefe sowie der in diesen Hohlraum eingebauten Mineralwolle auf das ermittelte Schall-Längsdämm-Maß zu erkennen. Daher sind genaue normative Festlegungen zu treffen, um die Reproduzierbarkeit von Messungen zu gewährleisten und die Güte der Ergebnisse sicher zu stellen. Allerdings zeigen die numerischen Berechnungen, dass die Abhängigkeit von der Hohlraumtiefe theoretisch noch viel größer ist, als dies die Messungen widerspiegeln. Insbesondere im mittleren Frequenzbereich sind die Schwankungen für die numerischen Berechnungen größer als bei den Messungen. Das entwickelte Rechenprogramm stellt ein Werkzeug zur Verfügung, mit dessen Hilfe der Einfluss einzelner Dämpfungseffekte auf die bauakustischen Eigenschaften von trennenden und flankierenden Bauteilen untersucht werden kann. Im Rahmen bauakustischer Untersuchungen kann es als ergänzendes Werkzeug verwendet werden, um ein tieferes Verständnis über die im System enthaltenen Dämpfungsmechanismen zu erlangen.

Die im Rahmen dieser Arbeit erzielten Ergebnisse können auf andere Anwendungsgebiete übertragen werden. So können die verwendeten numerischen Modelle beispielsweise zur Untersuchung der Fügestellendämpfung von Blechverbindungen verwendet werden. Zudem sind weitere Anwendungen denkbar wie die Berechnung der Schallabstrahlung von Schalldämpfern von PKW Auspuffsystemen. Des Weiteren könnte die Dämpfung zur Verbesserung der Schalldämmung von Bauteilen gezielt eingesetzt werden. Durch Einbringen von zusätzlicher Dämpfung ins System kann, wie zuvor in den untersuchten Fragestellungen zu erkennen war, die Schalldämmung oder auch die Längsdämmung von Bauteilen signifikant geändert werden.

## A Approximation der Dämpfungsparameter im poroelastischen Modell nach Biot

Im Folgenden sollen kurz die wichtigsten Zusammenhänge für die Bestimmung einiger Dämpfungsparameter im Modell für poroelastische Kontinua nach Biot wiedergegeben werden, die im Rahmen der Implementierung von dreidimensionalen Elementen, die auf der (u,p) Formulierung basieren, zu berücksichtigen sind. Details finden sich bei Allard [3] oder Panneton et al. [148]. Zur Vereinfachung und Effizienzsteigerung der numerischen Simulation können der komplexe viskose Dämpfungskoeffizient  $\tilde{b}(\omega)$  sowie der Kompressionsmodul  $\tilde{K}_f(\omega)$  im tiefen Frequenzbereich approximiert werden. Für den Dämpfungskoeffizienten  $\tilde{b}(\omega)$  lautet diese Approximation

$$\tilde{b}(\omega) = \beta' + i\omega\alpha'. \quad (\text{A.1})$$

Sie setzt sich aus zwei Koeffizienten  $\alpha'$  und  $\beta'$  zusammen, die sich zu

$$\alpha' = \frac{\phi^2 R_L^2}{2H} \text{ und } \beta' = \phi^2 R_L \quad (\text{A.2})$$

ergeben und damit vom Strömungswiderstand  $R_L$  sowie der Porosität  $\phi$  des Materials abhängen. Die Größe  $H$  wird als viskose charakteristische Frequenz bezeichnet und berechnet sich zu

$$H = \frac{R_L^2 \Lambda^2 \phi^2}{4\alpha_\infty^2 \eta \rho_0}. \quad (\text{A.3})$$

Neben dem Strömungswiderstand  $R_L$  und der Porosität  $\phi$  gehen zusätzlich die Tortuosität  $\alpha_\infty$  sowie die Viskosität  $\eta$  des Porenfluids ein. Für Luft gilt  $\eta = 1,84 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$ . Das exakte Modell zur Beschreibung dieses Verlustfaktors  $\tilde{b}(\omega)$  findet sich bei Allard [3]. Dieses Modell gilt zunächst nur für  $\omega/H \ll 1$ . Konvergenzstudien haben jedoch gezeigt, dass dieses Modell auch noch seine Gültigkeit besitzt, wenn  $\omega/H$  gegen Eins strebt.

Neben dem Verlustfaktor  $\tilde{b}(\omega)$  kann auch der viskose komplexe Kompressionsmodul  $\tilde{K}_f(\omega)$ , der ebenfalls frequenzabhängig ist, mit Hilfe einer Approximation bestimmt werden. Auch diese Approximation gilt zunächst nur für tiefe Frequenzen und berechnet sich aus

$$\tilde{K}_f(\omega) = P_a \left( 1 + i\tilde{\Gamma}(\omega) \right). \quad (\text{A.4})$$

Neben dem atmosphärischen Druck  $P_0 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$  geht der Faktor  $\tilde{\Gamma}(\omega)$  ein, der sich zu

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\omega}{H'} \quad (\text{A.5})$$

ergibt. Darin ist  $H'$  die sogenannte thermale charakteristische Frequenz, die sich aus

$$H' = \frac{16\eta}{B^2 \Lambda'^2 \rho_0} \quad (\text{A.6})$$

unter Einbeziehung der thermalen charakteristischen Länge  $\Lambda'$  berechnen lässt. Zusätzlich gehen in Gleichung (A.6) die Prandtl Zahl  $B^2 = 0,71$  sowie der Adiabatenexponent  $\gamma$ , der für Luft 1,4 beträgt, ein. Für tiefe Frequenzen ist der Realteil von  $\tilde{K}_f$  nahezu konstant, während der Imaginärteil von  $\tilde{K}_f$  linear von der Frequenz abhängt.



## B Anhand von Messungen identifizierte Materialparameter

Im folgenden Abschnitt sind die von der Physikalisch Technischen Bundesanstalt identifizierten Materialparameter zusammengestellt, die im Rahmen dieser Arbeit zur Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens mit Hilfe des in Abschnitt 3.6.2 beschriebenen Mehrparametermodells verwendet wurden. Neben den Parametern sind auch die Frequenzbereiche, für die diese Parameter ermittelt worden sind, angegeben. Details zur Ermittlung der Parameter sowie Parameter für weitere Materialien finden sich in [115].

### B.1 Parameter für Acrylglas

Dilatation: 3 Hz bis 10 kHz

Scherung: 1 bis 10 kHz

Index p	$E_p$ [N/m <sup>2</sup> ]	$G_p$ [N/m <sup>2</sup> ]	$b_p$ [1/s]
0	$3,39 \cdot 10^9$	$1,39 \cdot 10^9$	(0)
1	$8,23 \cdot 10^8$	$1,65 \cdot 10^8$	$8,82 \cdot 10^0$
2	$5,28 \cdot 10^8$	$1,26 \cdot 10^8$	$1,01 \cdot 10^2$
3	$2,60 \cdot 10^8$	$6,43 \cdot 10^7$	$4,79 \cdot 10^2$
4	$1,94 \cdot 10^8$	$4,85 \cdot 10^7$	$2,02 \cdot 10^3$
5	$1,65 \cdot 10^8$	$1,28 \cdot 10^8$	$9,81 \cdot 10^3$
6	$5,12 \cdot 10^7$	$9,16 \cdot 10^7$	$1,40 \cdot 10^4$
7	$7,47 \cdot 10^7$	$7,83 \cdot 10^7$	$9,60 \cdot 10^4$
8	$2,94 \cdot 10^7$	$1,14 \cdot 10^8$	$2,89 \cdot 10^5$
fast [Ns/m <sup>2</sup> ]	$9,18 \cdot 10^2$	$6,58 \cdot 10^2$	( $\infty$ )

## B.2 Parameter für Silikon

Dilatation: 10 bis 550 Hz

Index p	$E_p$ [N/m <sup>2</sup> ]	$G_p$ [N/m <sup>2</sup> ]	$b_p$ [1/s]
0	$8,92 \cdot 10^6$	–	(0)
1	$7,22 \cdot 10^5$	–	$1,25 \cdot 10^2$
2	$6,04 \cdot 10^5$	–	$5,04 \cdot 10^2$
fast [Ns/m <sup>2</sup> ]	$2,4 \cdot 10^1$	–	( $\infty$ )

Scherung: 50 Hz bis 3 kHz

Index p	$E_p$ [N/m <sup>2</sup> ]	$G_p$ [N/m <sup>2</sup> ]	$b_p$ [1/s]
0	–	$3,62 \cdot 10^6$	(0)
1	–	$2,48 \cdot 10^6$	$2,42 \cdot 10^3$
fast [Ns/m <sup>2</sup> ]	$1,17 \cdot 10^{-12}$	–	( $\infty$ )

## C Verzeichnis der verwendeten Symbole

### Lateinische Buchstaben

$A$	äquivalente Absorptionsfläche [m <sup>2</sup> ] Fläche [m <sup>2</sup> ]
$a$	Absorptionsfaktor [-]
$B$	Plattenbiegesteifigkeit [Nm]
$C$	Kopplungsmatrix
$c$	Schallgeschwindigkeit [m/s]
$D$	Dämpfungsmatrix
$d$	Abstand [m]
$E$	Elastizitätsmatrix
$D(\omega)$	komplexer Ersatzmodul
$E$	Elastizitätsmodul [N/m <sup>2</sup> ] Energie [Nm]
$F$	Kraft [N]
$\mathbf{f}$	Lastvektor
$f$	Frequenz [Hz]
$f_0$	Masse-Feder-Masse Resonanz [Hz]
$f_G$	Grenzfrequenz [Hz]
$f_H$	Hohlraumresonanz [Hz]
$f_n$	strukturelle Eigenfrequenz [Hz]
$G$	Schubmodul [N/m <sup>2</sup> ]
$h$	Plattendicke [m]
$I$	Flächenträgheitsmoment der Platte [m <sup>3</sup> ]
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
$K$	Kompressionsmodul [N/m <sup>2</sup> ]
$K_{ij}$	Stoßstellendämm-Maß [dB]
$j$	imaginäre Einheit [-]
$k$	Wellenzahl [1/m]
$k_S$	Schubkorrekturfaktor [-]
$L$	Schallpegel [dB]
$l_1, l_2, l_3$	Abmessung in $x_1, x_2, x_3$ -Richtung [m]
$\mathbf{M}$	Massenmatrix

$N$	Ansatzfunktion
$n$	Flächennormale
$p$	Druck, Schalldruck [ $\text{N/m}^2$ ]
$p_1, p_2, p_3$	Plattenbelastung in $x_1, x_2, x_3$ -Richtung [ $\text{N/m}^2$ ]
$\mathbf{p}$	Vektor der Schalldrücke
$Q$	Kompressionsmodul des Porenfluids [ $\text{N/m}^2$ ]
$R$	Schalldämm-Maß [dB]
$R'$	Bau-Schalldämm-Maß [dB]
$R'_w$	bewertetes Bau-Schalldämm-Maß [dB]
$R_L$	längenbezogener Strömungswiderstand [ $\text{Ns/m}^4$ ] Schall-Längsdämm-Maß
$R_S$	spezifischer Strömungswiderstand [ $\text{Ns/m}^3$ ]
$r$	Reflexionsfaktor [-]
$S$	Fläche des trennenden Bauteils [ $\text{m}^2$ ]
$\mathbf{S}_\infty(\omega)$	dynamische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix
$T$	Nachhallzeit [s]
$t$	Zeit [s]
$\mathbf{u}$	Vektor der Verformungsfreiheitsgrade
$V$	Volumen [ $\text{m}^3$ ]
$\mathbf{v}$	Schallschnelle [m/s]
$u_1, u_2, u_3$	Verformungen in $x_1, x_2, x_3$ -Richtung
$U_1, U_2, U_3$	Verschiebungen des Porenfluids
$W$	Arbeit [Nm]
$\bar{w}$	Wichtungsfunktion
$x_1, x_2, x_3$	kartesische Koordinaten
$\mathbf{x}$	Koordinatenvektor
$Z$	Impedanz [ $\text{Ns/m}$ ]

#### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Schallabsorptionsgrad [-]
$\alpha_\infty$	Strukturfaktor [-]
$\Gamma$	Rand
$\gamma$	Scherung [-]
$\varepsilon$	Dehnung [-]
$\eta$	Verlustfaktor [-]
$\vartheta$	Schalleinfallswinkel [°]
$\Lambda_t, \Lambda_v$	charakteristische Länge für thermische bzw. viskose Effekte [ $\mu\text{m}$ ]
$\lambda$	Wellenlänge [m]
$\mu$	dynamische Viskosität von Luft [ $\text{Ns/m}^2$ ] Dämpfung des akustischen Fluids
$\nu$	Querkontraktionszahl [-]

---

$\phi$	Porosität
$\rho$	Dichte [kg/m <sup>3</sup> ]
$\tilde{\rho}_{ij}$	modifizierte Dichten des Biot Modells [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Normalspannung [N/m <sup>2</sup> ]
$\tau$	Schubspannung [N/m <sup>2</sup> ]
	Schalltransmissionsgrad [-]
$\phi$	Porosität [-]
$\psi$	Schubparameter des Balkenelements [-]
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	Rotation um $x_1, x_2, x_3$ -Achse
$\Omega$	Gebiet
$\omega$	Kreisfrequenz [1/s]

### Mathematische Symbole

$\nabla$	Nablaoperator
$\Delta$	Laplace-Operator
$\delta$	Variation
$\frac{\partial(\dots)}{\partial t} = (\dots)$	partielle Zeitableitung
$\frac{\partial(\dots)}{\partial i} = (\dots)_{,i}$	partielle Ableitung nach $i$
$\frac{\partial}{\partial n}$	Normalenableitung
grad	Gradient
div	Divergenz
$[\cdot]$	Diagonalmatrix

# Literaturverzeichnis

- [1] Abarbanel, S.; Gottlieb, D.: A mathematical analysis of the PML method. *Journal of Computational Physics*, **134**(2), 357–363, 1997.
- [2] Ackermann, L.: *Simulation der Schalltransmission durch Wände*. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, Nr. 43. TU Braunschweig, Mechanik-Zentrum, Braunschweig, 2002.
- [3] Allard, J. F.: *Propagation of sound in porous media: modelling sound absorbing material*. Elsevier Science, Crown House, England, 1993.
- [4] Altenbach, H.; Altenbach, J.; Rikards, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. Dt. Verl. für Grundstoffindustrie, Stuttgart, 1996.
- [5] Altenbach, J.; Altenbach, H.; Naumenko, K.: *Ebene Flächentragwerke: Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [6] Alvarez, G. B.; Loula, A.F.D.; Carmo, E.G.D. do; Rochinha, F.A.: A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 4018–4035, 2006.
- [7] Amestory, P.R.; Duff, I.S.; L'Excellent, J.-Y.: Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **184**, 501–520, 2000.
- [8] Amestoy, P.; L'Excellent, J.-Y.: MUMPS home page. <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS>, 2007.
- [9] Amtec: Tecplot 360 User's Manual, 2005.
- [10] Andelfinger, U.: *Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke*. Dissertation, Bericht Nr.13 aus dem Inst. für Baustatik der Universität Stuttgart, 1991.
- [11] Atalla, N.; Panneton, R.; Deberque, P.: A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, **104**(3), 1444–1452, 1998.
- [12] Atalla, N.; Panneton, R.; Sgard, F. C.; Olny, X.: Acoustic absorption of macro-perforated porous materials. *Journal of Sound and Vibration*, **243**(4), 659–678, 2001.
- [13] Attenborough, K.: Acoustical characteristics of porous materials. *Physics Reports*, **82**(3), 179–227, 1982.

- [14] Babuska, I.; Ihlenburg, F.; Paik, E. T.; Sauter, S. A.: A Generalized Finite Element Method for solving the Helmholtz equation in two dimensions with minimal pollution. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **128**, 325–359, 1995.
- [15] Babuska, I.; Ihlenburg, F.; Strouboulis, T.; Gangaraj, S.K.: A Posteriori Error Estimation for Finite Element Solutions of Helmholtz Equation – Part II: Estimation of the Pollution Error. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**(21), 3883–3900, 1997.
- [16] Babuska, I.; Ihlenburg, F.; Strouboulis, T.; Gangaraj, S.K.: A Posteriori Error Estimation for Finite Element Solutions of Helmholtz Equation Part I: The Quality of Local Indicators and Estimators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**(18), 3443–3462, 1997.
- [17] Babuska, I.; Melenk, J.M.: The Partition of Unity Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 727–758, 1997.
- [18] Balay, S.; Buschelman, K.; Eijkhout, V.; Gropp, W.D.; Kaushik, D.; Knepley, M.G.; McInnes, L.C.; Smith, B.F.; Zhang, H.: PETSc Users Manual. ANL-95/11 - Revision 2.1.5, Argonne National Laboratory, 2004.
- [19] Balay, S.; Buschelman, K.; Gropp, W.D.; Kaushik, D.; Knepley, M.G.; McInnes, L.C.; Smith, B.F.; Zhang, H.: PETSc Web page. <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2001.
- [20] Balay, S.; Gropp, W.D.; McInnes, L.C.; Smith, B.F.: Efficient Management of Parallelism in Object Oriented Numerical Software Libraries. In *Modern Software Tools in Scientific Computing*. (Arge, E.; Bruaset, A. M.; Langtangen, H. P.; Langtangen, H. P., Eds.). Birkhäuser Press, 163–202, 1997.
- [21] Bartsch, G.; Wulf, C.: Adaptive Multigrid for Helmholtz Problems. *Journal of Computational Acoustics*, **11**(3), 341–350, 2003.
- [22] Bathe, K.-J.: *Finite-Element-Methoden*. Springer, Berlin, 1986.
- [23] Bathe, K.-J.; Dvorkin, E. N.: Short communication a four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, 367–383, 1985.
- [24] Bathe, K.J.; C.Nitikitpaiboon; X.Wang: A Mixed Displacement-based Finite Element Formulation for acoustic Fluid-Structure Interaction. *Computers & Structures*, **56**(2/3), 225–237, 1995.
- [25] Belytschko, T.; Wong, B. L.; Stolarski, H.: Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 385–414, 1989.
- [26] Berenger, J.P.: A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, **114**(2), 195–200, 1994.
- [27] Bettess, P.: Infinte Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, 53–64, 1977.

- [28] Bettess, P.: *Infinite Elements*. Penshaw Press, 1992.
- [29] Biot, M.A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid.I. Low-Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of America*, **28**(2), 168–178, 1956.
- [30] Biot, M.A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid.II. Higher Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of America*, **28**(2), 179–191, 1956.
- [31] Bischoff, M.: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Nr. 30. Inst. f. Baustatik, Stuttgart, 1999.
- [32] Bletzinger, K.-U.; Bischoff, M.; Ramm, E.: A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers & Structures*, **75**(3), 321–334, 2000.
- [33] Brunskog, J.; Davidsson, P.: Sound transmission of structures. A finite element approach with simplified room description. *Acta Acustica united with Acustica*, **90**(5), 847–857, 2004.
- [34] Burg, K.; Haf, H.; Wille, F.: *Höhere Mathematik für Ingenieure*, Nr. 5. B.G. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [35] Burton, A.J.; Miller, G.F.: The Application of the Integral Equation Methods for Acoustic Radiation Valid for All Wavenumbers. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, **323**(201–210), 1971.
- [36] Cederfeldt, L.: *On the use of finite element method on some acoustical problems*. Document / Swedish Council for Building Research, Nr. 1979,4. Swedish Council for Building Research, Stockholm, 1979.
- [37] Champoux, Y.; Allard, J.-F.: Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *Journal of Applied Physics*, **70**(4), 1975–1979, 1991.
- [38] Chen, W.: Meshfree boundary particle method applied to Helmholtz problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **26**(7), 577–582, 2002.
- [39] Cheng, W.: *Schallabstrahlung einer schwingenden Reissner/Mindlin Platte*. Dissertation, Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 10, Braunschweig, 1993.
- [40] Christensen, R.M.: *Theory of viscoelasticity*. Dover books on engineering. Dover Publications, Mineola, NY, 2nd edition, 2003.
- [41] Clasen, D.; Langer, S.: Numerical Investigation of the Influence of Joints on Airborne Sound Insulation. *Proc. ICSV 12*, Lisbon, Nr. 683, 2005.
- [42] Clasen, D.; Langer, S.; Schanz, M.: Efficient Simulation of Sound Insulation in Building Acoustics. *Proc. of the Joint Congress CFA/DAGA04, SFA, DEGA*, 303–304, 2004.
- [43] Coyette, J. P.: The use of finite-element and boundary-element models for predicting the vibro-acoustic behaviour of layered structures. *Advances in Engineering Software*, **30**, 133–139, 1999.



- [44] Coyette, J. P.; Fyfe, K. R.: Solution of Elasto-Acoustic Problems using a variational Finite Element/Boundary Element Techniques. *Numerical Techniques in Acoustical Radiation*, **6**, 15–25, 1989.
- [45] Coyette, J. P.; Vanderborck, G.; Steichen, W.: A coupling procedure for modeling acoustic problems using finite elements and boundary elements. *Journal de Physique IV, Colloque C5*, **4**, 331–333, 1994.
- [46] Craggs, A.; Stead, G.: Sound Transmission between Enclosures - A Study Using Plate and Acoustic Finite Elements. *Acustica*, **35**(2), 89–98, 1976.
- [47] Craik, R. J. M.: In-plane wave propagation in Buildings. *Applied Acoustics*, **53**(4), 273–289, 1998.
- [48] Craik, R. J. M.; Nightingale, T. R. T.; Steel, J. A.: Sound transmission through a double leaf partition with edge flanking. *Journal of the Acoustical Society of America*, **101**(2), 964–969, 1997.
- [49] Craik, R. J. M.; Wilson, R.: Sound transmission through parallel plates coupled along a line. *Applied Acoustics*, **49**(4), 353–372, 1996.
- [50] Cremer, L.; Heckl, M.: *Körperschall*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [51] Crocker, M. J.; Price, A. J.: Sound transmission using statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, **9**(3), 460–486, 1969.
- [52] Dauchez, N.; Sahraoui, S.; Atalla, N.: Convergence of poroelastic finite elements based on biot displacement formulation. *Journal of the Acoustical Society of America*, **109**(1), 33–40, 2001.
- [53] Dauksher, W.; Emery, A.F.: Accuracy in modeling the acoustic wave equation with Chebyshev spectral finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, **26**, 115–128, 1997.
- [54] Davidsson, P.: *Structure-Acoustic Analysis; Finite Element Modelling and Reduction Methods*. Dissertation, Lund University, Sweden, 2004.
- [55] Davidsson, P.; Brunskog, J.; Wernberg, P.-A.; Sandberg, G.; Hammer, P.: Analysis of sound transmission loss of double-leaf walls in the low-frequency range using the finite element method. *Building Acoustics*, **11**(4), 239–257, 2004.
- [56] Debergue, P.; Panneton, R.; Atalla, N.: Boundary conditions for the weak formulation of the mixed (u,p) poroelasticity problem. *Journal of the Acoustical Society of America*, **106**(5), 2383–2390, 1999.
- [57] Decouvreur, V.; De Bel, E.; Bouillard, Ph: On the effect of the dispersion error when updating acoustic models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**(4), 394–405, 2006.
- [58] Desmet, W.: *A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*. Dissertation, KU Leuven, Leuven, 1998.

- [59] DIN 4109: *Schallschutz im Hochbau - Anforderungen und Nachweise*. DIN Taschenbuch 35: Schallschutz. Beuth, 1997.
- [60] DIN 52210: *Luft- und Trittschalldämmung*. DIN Taschenbuch 35: Schallschutz. Beuth-Verlag, 1997.
- [61] DIN EN 12354: *Berechnung der akustischen Eigenschaften von Gebäuden aus Bauteileigenschaften*. Beuth, 2000.
- [62] DIN EN ISO 140-5: *Messung der Luftschalldämmung von Fassadenelementen und Fassaden in Gebäuden*. Beuth, 1996.
- [63] DIN EN ISO 717-1: *Bewertung der Schalldämmung in Gebäuden und von Bauteilen. Teil 1: Luftschalldämmung*. DIN Taschenbuch 35: Schallschutz. Beuth-Verlag, 1997.
- [64] Dominguez, J.: *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications - Elsevier Applied Science, 1993.
- [65] Dominguez, J.; R, Abascal: Dynamics of Foundations . In *Topics in Boundary Element Research*. (Brebbia, C.A., Ed.), Springer-Verlag, 1984.
- [66] Ehlers, W.: *Poröse Medien: ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie*, Nr. 47, *Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen / Universität Gesamthochschule Essen*. Univ., Essen, 1989.
- [67] Elman, H.C.; Ernst, O.G.; O’Leary, D.P.: A Multigrid Method Enhanced by Krylov Subspace Iteration for Discrete Helmholtz Equations. *Journal on Scientific Computing*, **23**(4), 1291–1315, 2002.
- [68] EN ISO 140: *Akustik – Messung der Schalldämmung in Gebäuden und von Gebäudeteilen*. Beuth, 1998.
- [69] Fahy, F.: *Sound and Structural Vibration*. Academic Press, 1985.
- [70] Fahy, F. J.: An introduction to Statistical Energy Analysis. *Proceedings of ISAAC6 'Advanced techniques in applied and numerical acoustics'*, 1–27, 1995.
- [71] Farhat, C.; Avery, P.; Tezaur, R.; Li, J.: FETI-DPH: a dual-primal domain decomposition method for acoustic scattering. *Journal of Computational Acoustics*, **13**(3), 499–524, 2005.
- [72] Farhat, C.; Lesoinne, M.: Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **182**, 499–515, 2000.
- [73] Fausti, P.; Pompoli, R.; Smith, R. S.: An intercomparison of laboratory measurements of airborne sound insulation of lightweight plasterboard walls. *Building Acoustics*, **6**(2), 127–141, 1999.
- [74] Flemisch, B.; Kaltenbacher, M.; Wohlmuth, B.I.: Elasto-acoustic and acoustic-acoustic coupling on non-matching grids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **97**(13), 1791–1810, 2006.

- [75] Freund, R.W.: A transpose-free quasi-minimal residual algorithm for non-Hermitian linear systems. *Journal on Scientific Computing*, **14**(2), 470–482, 1993.
- [76] Gander, M. J.; Nataf, F.: An incomplete LU preconditioner for problems in acoustics. *Journal of Computational Acoustics*, **13**(3), 455–476, 2005.
- [77] Gasch, R.; Knothe, K.: *Strukturdynamik - Diskrete Systeme*. Springer, Berlin [u.a.], 1987.
- [78] Gaul, L.; Fiedler, C.: *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Friedrich Vieweg & Sohn, Wiesbaden, Braunschweig, 1997.
- [79] Gibbs, B.M.; Maluski, S.: Airborne sound level difference between dwellings at low frequencies. *Building Acoustics*, **11**(1), 61–78, 2004.
- [80] Giljohann, D.; Bittner, M.: The Three-Dimensional DtN Finite Element Method for Radiation Problems of the Helmholtz Equation. *Journal of Sound and Vibration*, **127**(3), 383–394, 1998.
- [81] Girkmann, K.: *Flächentragwerke*. Springer-Verlag, Wien, 1959.
- [82] Givoli, D.: Non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, **94**(1), 1–29, 1991.
- [83] Givoli, D.: High-order local non-reflecting boundary conditions: a review. *Wave Motion*, **39**(4), 319–326, 2004.
- [84] Guy, R. W.: The steady state transmission of sound at normal and oblique incidence through a thin panel backed by a rectangular room - a multi-modal analysis. *Acustica*, **41**, 295–304, 1979.
- [85] Hagstrom, T.: Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Acta Numerica*, **8**, 47–106, 1999.
- [86] Hamdi, M. A.; Ousset, Y.; Verchery, G.: A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure system. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **13**, 139–150, 1978.
- [87] Hampel, S.: *Numerische Simulation der Schallausbreitung unter Berücksichtigung meteorologischer Einflüsse*. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, Nr. 61. TU Braunschweig, Mechanik-Zentrum, Braunschweig, 2006.
- [88] Harari, I.; Barbone, P.; Montgomery, J.: Finite Element Formulations for exterior problems: Application to hybrid methods, non-reflecting boundary conditions, and infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 2791–2805, 1997.
- [89] Harari, I.; Hughes, T.J.R.: Galerkin/least-squares finite element methods for the reduced wave equation with non-reflecting boundary conditions in unbounded domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **98**(3), 411–454, 1992.
- [90] Harari, I.; Slavutin, M.; Turkel, E.: Analytical and numerical studies of a finite element PML for the Helmholtz equation. *Journal of Computational Acoustics*, **8**(1), 121–137, 2000.

- [91] Henn, H.; Sinambari, G. R.; Fallen, M.: *Ingenieurakustik*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1984.
- [92] Hernandez, V.; Roman, J. E.; Tomas, A.; Vidal, V.: SLEPc home page. <http://www.grycap.upv.es/slepc>, 2006.
- [93] Hernandez, V.; Roman, J.E.; Vidal, V.: SLEPc: A Scalable and Flexible Toolkit for the Solution of Eigenvalue Problems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, **31**(3), 351–362, 2005.
- [94] Heymans, N.; Bauwens, J.-C.: Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior. *Rheologica acta*, **33**(3), 210–219, 1994.
- [95] Hongisto, V.: Sound Insulation of Double Panels - Comparison of Existing Prediction Models. *Acta acustica united with Acustica*, **92**(1), 61–78, 2006.
- [96] Hughes, T. J. R.: *The finite element method*. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [97] Hughes, T.J.R.; Taylor, R.L.; Kanoknukulchai, W.: A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, 1529–1543, 1977.
- [98] Hughes, T.J.R.; Tezduyar, T.: Finite Elements based upon Mindlin Plate Theory with particular reference to the four-node isoparametric element. *Journal of Applied Mechanics*, **48**, 587–596, 1981.
- [99] Huttunen, T.; Kaipio, J.P.; Monk, P.: Acoustic modelling using the ultra weak variational formulation. *Baltic-Nordic Acoustics Meeting*, Mariehamn, Finland, 2004.
- [100] Huttunen, T.; Kaipio, J.P.; Monk, P.: The perfectly matched layer for the ultra weak variational formulation of the 3D Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **61**(7), 1072–1092, 2004.
- [101] Huttunen, T.; Monk, P.; Collino, F.; Kaipio, J.P.: The Ultra-Weak Variational Formulation for Elastic Wave Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **25**(5), 1717–1742, 2004.
- [102] Ibrahimbegovic, A.; Taylor, R. L.; Wilson, E. L.: A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**, 445–457, 1990.
- [103] Ihlenburg, F.: Sound in Vibrating Cabins: Physical Effects, Mathematical Description, Computational Simulation with FEM. In *CISM Course on Structural Vibrations and Acoustics*. (Ohayon, R.; Sandberg, G., Eds.), CISM, Udine, Italy, 2006.
- [104] Ihlenburg, F.; Babuska, I.: Finite Element Solution of the Helmholtz Equation with High Wave Number Part I: The h-Version of the FEM. *Computers and Mathematics with Applications*, **30**(9), 9–38, 1995.
- [105] Ihlenburg, F.; Babuska, I.: Finite Element Solution of the Helmholtz Equation with High Wave Number Part II: The h-p Version of the FEM. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **34**(1), 315–358, 1997.

- [106] Jäger, M.: *Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens für bewegte Schallquellen*. Dissertation, Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 17, Braunschweig, 1994.
- [107] Johnson, A.R.: Modeling Viscoelastic Materials Using Internal Variables. *The Shock and Vibration Digest*, **31**(2), 91–100, 199.
- [108] Käferstein, B.: *Reduzierung des Körperschalls in Stahlblech-Konstruktionen durch Nutzung von Fügstellen als Dämpfungselemente*. Forschungsvereinigung Stahlanwendung e. V. im Stahl-Zentrum, Düsseldorf, 2004.
- [109] Kang, Y. J.; Bolton, J. S.: Finite element modeling of isotropic elastic porous materials coupled with acoustical finite elements. *Journal of the Acoustical Society of America*, **98**(1), 635–643, 1995.
- [110] Karypis, G.; Kumar, V.: A Parallel Algorithm for Multilevel Graph Partitioning and Sparse Matrix Ordering. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **48**, 71–95, 1998.
- [111] Kechroud, R.; Soulaïmani, A.; Saad, Y.; Gowda, S.: Preconditioning techniques for the solution of the Helmholtz equation by the finite element method. *Mathematics and Computers in Simulation*, **65**(4), 303–322, 2004.
- [112] Kim, C. S.; Dickinson, S. M.: The flexural vibration of line supported rectangular plate systems. *Journal of Sound and Vibration*, **114**(1), 129–142, 1987.
- [113] Klein, P.: *Zur Beschreibung der dynamischen Wechselwirkung von Fundamentstrukturen mit dem viskoelastischen Baugrund durch dreidimensionale Randelementformulierungen*. Dissertation, Universität der Bundeswehr, Hamburg, 1989.
- [114] Kling, C.: Miniaturising a wall test facility. *Building Acoustics*, **14**(4), 243–266, 2007.
- [115] Kling, C.; Schmelzer, M.: Dämpfung in der Bauakustik – Ermittlung der Materialdämpfung mit Hilfe eines N-Parameter-Modells. *DAGA '06*. DEGA, 2006.
- [116] Knothe, K.; Wessels, H.: *Finite Elemente: eine Einführung für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [117] Kropp, W.; Rebillard, E.: On the air-borne sound insulation of double wall constructions. *Acustica*, **85**, 707–720, 1999.
- [118] Kurtze, G.; Schmidt, H.; Westphal, W.: *Physik und Technik der Lärmbekämpfung*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1975.
- [119] Kuttruff, H.: *Room acoustics*. Applied Science Publications, London, 2nd edition, 1979.
- [120] Lacroix, V.; Bouillard, P.: 3D acoustic analysis using an iterative multilevel meshless method. In *ISMA 2002*. (Sas, P.; Van Hal, B., Eds.). Katholieke Universiteit Leuven, 885–889, 2002.
- [121] Lang, J.: A Round Robin on Sound Insulation in Buildings. *Applied acoustics London*, **52**(3-4), 225–238, 1997.

- [122] Langer, S.: *Schalltransmission durch Isolierverglasung*. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, Nr. 41. TU Braunschweig, 2001.
- [123] Langer, S.; Antes, H.: Analyses of Sound Transmission through Windows by coupled Finite and Boundary Element Methods. *Acta Acustica united with Acustica*, **89**, 78–85, 2003.
- [124] Lehmann, L.: *Wave Propagation in Infinite Domains*. Springer, Berlin, 2007.
- [125] Leis, R.: *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Bibliographisches Institut Mannheim, Mannheim, 1967.
- [126] Leissa, A.: *Vibrations of plates*. Acoustical Society of America, 1993.
- [127] Lekhnitskii, S. G.: *Anisotropic plates*. Gordon and Breach Science Publishers, London, 1968.
- [128] Li, W.L.; Wu, T.W.; Seybert, A.F.: A Half-Space Boundary Element Method for Acoustic Problems with a reflecting Plane of Arbitrary Impedance. *Journal of Sound and Vibration*, **171**(2), 173–184, 1994.
- [129] Liew, K. M.; Xiang, Y.; Kitipornchai, S.: Research on thick plate vibration: a literature survey. *Journal of Sound and Vibration*, **180**(1), 163–176, 1995.
- [130] Maluski, S.; Gibbs, B. M.: The influence of partition boundary conditions on sound level difference between rooms at low frequencies. *Euro Noise 98*, 681–686, 1998.
- [131] Matthies, H.G.; Steindorf, J.: Partitioned but strongly coupled iteration schemes for nonlinear fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, **80**, 1991–2000, 2002.
- [132] McCulloch, C.; Cremers, L.; Guisset, P.: Numerical modelling of acoustic transparency. *Boundary Elements in Acoustics - Advances Applications*, O. v. Estorff, wit press edition, 2000.
- [133] McCulloch, C.; Estorff, O.v.: Zur effektiven numerischen Modellierung des Schalldurchgangs durch Strukturen. *Fortschritte der Akustik, DAGA 2000*, 718–719, 2000.
- [134] Mehra, S. R.: *Berechnung der Luftschalldämmung von einschaligen Trennbauteilen endlicher Abmessung*. Dissertation, Lehrstuhl Konstruktive Bauphysik der Universität Stuttgart, 1995.
- [135] Meier, A.; Schmitz, A.; Raabe, G.: Inter-laboratory test of sound insulation measurements on heavy walls: part II - results of main test. *Building Acoustics*, **6**(3/4), 171–186, 1999.
- [136] Message Passing Interface Forum: MPI: A Message-Passing Interface Standard. Version 1.1, University of Tennessee, Knoxville, Tennessee, 1995.
- [137] Message Passing Interface Forum: MPI-2: Extensions to the Message-Passing Interface. Version 1.0, University of Tennessee, Knoxville, Tennessee, 1997.
- [138] Meyer, E.; Neumann, E.-G.: *Physikalische und technische Akustik: Eine Einführung mit zahlreichen Versuchsbeschreibungen*. Vieweg, 1979.

- [139] Mindlin, R. D.: Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 31–38, 1951.
- [140] Monga Made, M.M.: Incomplete factorization-based preconditionings for solving the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**(5), 1077–1102, 2001.
- [141] Monk, P.; Wang, D.: A least squares method for the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **175**(1), 121–136, 1999.
- [142] Morand, H. J.-P.; Ohayon, R.; James, C.A.: *Fluid structure interaction: applied numerical methods*. Wiley, Chichester, 1995.
- [143] Norton, M. P.: *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*. Cambridge University Press, 1989.
- [144] Oberai, A.A.; Pinsky, P.M.: A residual-based finite element method for the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **49**, 399–420, 2000.
- [145] Ortiz, P.; Sanchez, E.: An improved partition of unity finite element model for diffraction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 2727–2740, 2001.
- [146] Owen, D. R. J.; Figueiras, J. A.: Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **19**, 541–566, 1983.
- [147] Panneton, R.; Atalla, N.: Numerical prediction of sound transmission through multilayer systems with isotropic poroelastic materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, **100**(1), 346–354, 1996.
- [148] Panneton, R.; Atalla, N.: An efficient finite element scheme for solving the three-dimensional poroelasticity problem in acoustics. *Journal of the Acoustical Society of America*, **101**(6), 3287–3298, 1997.
- [149] Panneton, R.; Atalla, N.; Charron, F.: A finite-element formulation for the vibroacoustic behaviour of double-plate structures with cavity absorption. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, **41**(1), 5–12, 1995.
- [150] Peiffer, A.; Tewes, S.: SEA Modellierung von Doppelwandstrukturen. *DAGA '07*. DEGA, 2007.
- [151] Petersen, S.; Dreyer, D.; von Estorff, O.: Assessment of finite and spectral element shape functions for efficient iterative simulations of interior acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 6463–6478, 2006.
- [152] Pluymers, B.; Desmet, W.; Vandepitte, D.; Sas, P.: Application of an efficient wave-based prediction technique for the analysis of vibro-acoustic radiation problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **168**, 353–364, 2004.

- [153] Podlubny, I.: *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Nr. 198, *Mathematics in science and engineering*. Acad. Press, San Diego, Calif. [u.a.], 1999.
- [154] Reese, T.; Zoglowek, D.: *Experimentelle Ausführung und Erprobung lärmgeminderter Reifen*. Bundesministerium für Forschung und Technologie, 1987.
- [155] Rossikhin, Y.A.; Shitikova, M.V.: Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass systems. *Acta mechanica* . - Wien : Springer, **120**(1-4), 109–126, 1997.
- [156] Rossikhin, Y.A.; Shitikova, M.V.: Analysis of Rheological Equations Involving More Than One Fractional Parameters by the Use of the Simplest Mechanical Systems Based on These Equations. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, **5**(1), 131–176, 2001.
- [157] Saad, Y.; Schultz, M.H.: GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **7**(3), 856–869, 1986.
- [158] Sandberg, G.: *Finite element modelling of fluid-structure interaction*. Ph.D. thesis. Division of Structural Mechanics, Lund Institute of Technology, 1986.
- [159] Sauter, S.; Schwab, C.: *Randelementmethoden: Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. Teubner, Stuttgart, 1st edition, 2004.
- [160] Schanz, M.; Diebels, S.: A comparative study of Biot's theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems. *Acta mechanica*, **161**, 213–236, 2003.
- [161] Schenk, H. A.: Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems. *Journal of the Acoustical Society of America*, **44**(1), 41–58, 1968.
- [162] Schilling, S.: *Ursachen und Minderungspotential des von der Einspritzpumpe induzierten Motorgeräusches*. TH Aachen, 1995.
- [163] Schmelzer, M.: *Identifikation der Parameter von Zeitbereichsmodellen linear-viskoelastischer Werkstoffe*, Nr. 54, *Braunschweiger Schriften zur Mechanik*. Inst. für Dynamik und Schwingungen, Techn. Univ., Braunschweig, 2004.
- [164] Schmelzer, Martin; Scholl, Werner: Längsdämmungsmessung in normalen Schalldämm-Prüfständen. *Bauphysik*, **28**, 253–256, 2006.
- [165] Schmitz, A.; Meier, A.; Raabe, G.: Inter-laboratory test of sound insulation measurements on heavy walls: part I - preliminary test. *Building Acoustics*, **6**(3/4), 159–169, 1999.
- [166] Scholl, W.; Brandstetter, D.: Neue Schalldämmwerte bei Gipskartonplatten-Metallständerwänden. *Bauphysik*, **22**(2), 101–107, 2000.
- [167] Scholze, J.: Schalldämmung zweischaliger Haustrennwände. *Bauphysik*, **21**(3), 106–113, 1999.



- [168] Seybert, A.F.; Soenarko, B.: Radiation and scattering of acoustic waves from bodies of arbitrary shape in a three dimensional half space. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **110**, 112–117, 1988.
- [169] Seybert, A.F.; Wu, T.W.: Modified Helmholtz integral equation for bodies sitting on an infinite plane. *Journal of the Acoustical Society of America*, **85**(1), 19–23, 1989.
- [170] Skudrzyk, E.: *Die Grundlagen der Akustik*. Springer, Wien, 1954.
- [171] Sommerfeld, A.: *Partielle Differentialgleichungen in der Physik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1978.
- [172] Sommerfeld, M.; Wittstock, V.: Einfluss von Raumgeometrie und Schallabsorption auf die Schalldämmung. *DAGA '07*. DEGA, 2007.
- [173] Song, C.; Bazyar, M.: A boundary condition in Padé series for frequency-domain solution of wave propagation in unbounded domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, accepted, 2007.
- [174] Stehno, G.; Stickler, H.: *Lärmpegelsenkung durch Flüsterasphalt*. Forschungsges. für d. Straßenwesen im Österr. Ingenieur-und Architekten-Verein, 1986.
- [175] Stojek, M.: Least-squares Trefftz-type Elements for the Helmholtz Equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, 831–850, 1998.
- [176] Stroustrup, B.: *Die C++-Programmiersprache*. The C++ programming language dt. Addison-Wesley, München [u.a.], 4th edition, 2007.
- [177] Surguladze, T.A.: On Certain Applications of Fractional Calculus to Viscoelasticity. *Journal of Mathematical Sciences*, **112**(5), 4517–4557, 2002.
- [178] Tadeu, A.; António, J.; Mateus, D.: Sound insulation provided by single and double panel walls-a comparison of analytical solutions versus experimental results. *Applied acoustics*, **65**(1), 15–30, 2004.
- [179] Tadeu, A.; António, J.M.P.: Acoustic insulation of single panel walls provided by analytical expressions versus the mass law. *Journal of Sound and Vibration*, **257**(3), 457–476, 2002.
- [180] Taylor, R.L.; Beresford, P.J.; Wilson, E.L.: A Non-Conforming Element for Stress Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **10**, 1211–1220, 1976.
- [181] Tezaur, R.; Macedo, A.; Farhat, C.: Iterative solution of large-scale acoustic scattering problems with multiple right-hand-sides by a domain decomposition method with Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **51**(10), 1175–1194, 2001.
- [182] The MacNeal-Schwendler Corporation: MSC/NASTRAN User's Manual, 2003.
- [183] The MacNeal-Schwendler Corporation: MSC/PATRAN User's Manual, 2003.

- [184] Thompson, D.; Janssens, M.; Dittrich, M: Rollgeräusche durch den Rad/Schiene-Kontakt - Beurteilung von Lärminderungsmaßnahmen. *ZEV + DET Glas. Ann.*, **121**(2/3), 226–233, 1997.
- [185] Thompson, L.L.; Pinsky, P.M.: A Galerkin Least-squares Finite Element Method for the Two-dimensional Helmholtz Equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, 371–398, 1995.
- [186] Thompson, L.L.; Pinsky, P.M.: Acoustics. In *Solids and Structures*. (de Borst, R., Ed.), Nr. 2, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Wiley & Sons Ltd., 695–717, 2004.
- [187] Thompson, L.L.; Sankar, S.: Dispersion analysis of stabilized finite element methods for acoustic fluid interaction with Reissner-Mindlin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**(11), 2521–2546, 2001.
- [188] Toselli, A.; Widlund, O.: *Domain decomposition methods: algorithms and theory*. Springer series in Computational Mathematics, Nr. 34. Springer, Berlin, 2004.
- [189] Troge, A.: *Daten zur Umwelt 2000*. Schmidt-Verlag, Umweltbundesamt Berlin, 2001.
- [190] Tröndle, G.: *Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D-Randelementmethode*. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, Nr. 21. TU Braunschweig, Mechanik-Zentrum, Braunschweig, 1995.
- [191] Tsynkov, S. V.: Numerical solution of problems on unbounded domains. A review. *Applied Numerical Mathematics*, **27**, 465–532, 1998.
- [192] Turkel, E.; Yefet, A.: Absorbing PML boundary layers for wavelike equations. *Applied Numerical Mathematics*, **27**(4), 533–557, 1998.
- [193] Umweltbundesamt: Umfrage zum Thema Lärm. [www.umweltbundesamt.de/laermumfrage](http://www.umweltbundesamt.de/laermumfrage), 2007.
- [194] van der Vorst, H. A.: Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **13**(2), 631–644, 1992.
- [195] von Estorff, O.: Efforts to Reduce Computation Time in Numerical Acoustics - An Overview. *Acta Acustica united with Acustica*, **89**, 1–13, 2003.
- [196] von Estorff, Otto: Discretization methods in acoustics and noise control. *Euro Noise 98*, 1998.
- [197] Wachulec, M.: *Power flow and structure-borne noise in medium frequency range*. Dissertation, Aalborg University, 2002.
- [198] Wang, X.; Bathe, K.J.: Displacement-Pressure Based Mixed Finite Element Formulations for Acoustic Fluid-structure Interaction Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**(11), 2001–2018, 1997.

- [199] Wittrick, W. H.: Analytical, three-dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin's plate theory. *International Journal of Solids and Structures*, **23**, 441–464, 1987.
- [200] Wittstock, V.; Jachman, H.: Aufbau und Erprobung eines Modellhallraums. *DAGA '07. DEGA*, 489–490, 2007.
- [201] Wohlmuth, B.I.: A Mortar Finite Element Method Using Dual Spaces for the Lagrange Multiplier. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **38**(3), 989–1012, 2000.
- [202] Wolf, J. P.; Song, C.: *Finite-Element Modelling of Unbounded Media*. Wiley and Sons, Chichester, UK, 1996.
- [203] Wolf, J.P.: *The Scaled Boundary Finite Element Method*. Wiley and Sons, Chichester, UK, 2003.
- [204] Wolf, J.P.; Song, C.: Consistent infinitesimal finite-element cell method: three-dimensional scalar wave equation. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, **63**, 650–654, 1996.
- [205] Wong, B. L.; Belytschko, T.: Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange plane and plate elements. *Engineering Computation*, **4**, 229–239, 1987.
- [206] Wu, T. W.; Dandapani, A.: A Boundary Solution for Sound Transmission through Thin Panels. *Journal of Sound and Vibration*, **171**(2), 145–157, 1994.
- [207] Wu, T.W.; Seybert, A.F.: Acoustic Radiation and Scattering . In *Boundary Element Methods in Acoustics*. (Ciskowski, R.D.; Brebbia, C.A., Eds.), Computational Mechanics Publications - Elsevier Applied Science, 1991.
- [208] Yue, B.; Guddati, M.N.: Dispersion-reducing finite elements for transient acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **118**(4), 2132–2141, 2005.
- [209] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The finite element method*. McGraw-Hill, 1989.

## Braunschweiger Schriften zur Mechanik – BSM

Bisher erschienene Berichte in dieser Reihe

- 1–1990 Plonski, Thomas:  
Dynamische Analyse von schnelldrehenden Kreiszylinderschalen
- 2–1991 Wegener, Konrad:  
Zur Berechnung grosser plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Über-  
spannungstyp
- 3–1992 Gröhlich, Hubert:  
Finite-Element-Formulierung für vereinheitlichte inelastische Werkstoffmodelle ohne  
explizite Fliessflächenformulierung
- 4–1992 Hesselbarth, Hanfried:  
Simulation von Versetzungsstrukturbildung, Rekristallisation und Kriechschädigung  
mit dem Prinzip der zellulären Automaten
- 5–1992 Schlums, Hartmut:  
Ein stochastisches Werkstoffmodell zur Beschreibung von Kriechen und zyklischem  
Verhalten metallischer Werkstoffe
- 6–1992 Kublik, Frithjof:  
Vergleich zweier Werkstoffmodelle bei ein- und mehrachsigen Versuchsführungen im  
Hochtemperaturbereich
- 7–1992 Bechtloff, Jürgen:  
Interpolationsverfahren höheren Grades für Robotersteuerungen
- 8–1993 Müller, Michael:  
Dreidimensionale elastodynamische Analyse von Tanks mit fluidbenetzten Einbauten
- 9–1993 Senker, Peter:  
Stabilitätsanalyse elastischer RotorsystemeStabilitätsanalyse elastischer Rotorsysteme
- 10–1993 Cheng, Weimin:  
Schallabstrahlung einer schwingenden Reisner/Mindlin Platte
- 11–1993 Wiebe, Thomas:  
Wellenausbreitung in poroelastischen Medien: Untersuchung mit Randintegralgleichungen
- 12–1993 Hahne, Matthias:  
Beschreibung der plastischen Längsdehnung bei Torsion mit einem makroskopischen  
Stoffgesetz
- 13–1993 Heisig, Gerald:  
Zum statischen und dynamischen Verhalten von Tiefbohrsträngen in räumlich gekrümmten Bohrlöchern

- 14–1994 de Araújo, Francisco Célio:  
Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE-Methode
- 15–1994 Kristen, Martin:  
Untersuchungen zur elektrischen Ansteuerung von Formgedächtnis-Antrieben in der Handhabungstechnik
- 16–1994 Latz, Kersten:  
Dynamische Interaktion von Flüssigkeitsbehältern und Baugrund
- 17–1994 Jäger, Monika:  
Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens für bewegte Schallquellen
- 18–1994 August, Martin:  
Schwingungen und Stabilität eines elastischen Rades, das auf einer nachgiebigen Schiene rollt
- 19–1995 Erbe, Matthias:  
Zur Simulation von Risswachstum in dreidimensionalen, elastisch-plastischen Strukturen mit der Methode der Finiten Elemente
- 20–1995 Gerdes, Ralf:  
Ein stochastisches Werkstoffmodell für das inelastische Materialverhalten metallischer Werkstoffe im Hoch- und Tieftemperaturbereich
- 21–1995 Tröndle, Georg:  
Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode
- 22–1996 Degenhardt, Richard:  
Nichtlineare dynamische Bauwerksprobleme und Interaktion mit dem Baugrund
- 23–1996 Feise, Hermann Josef:  
Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern
- 24–1996 Haubrok, Dietmar:  
Reibungsfreie Kontaktprobleme der 2-D Elastostatik und -dynamik als Optimierungsaufgabe mit REM-Matrizen
- 25–1996 Lehmann, Lutz:  
Numerische Simulation der Spannungs- und Geschwindigkeitsfelder in Silos mit Einbauten
- 26–1996 Klein, Ralf:  
Dynamische Interaktion von dünnwandigen Tragwerken und Boden mit Abschirmschlitzten
- 27–1996 Kopp, Thilo:  
Simulation grosser inelastischer Deformationen bei Torsionsversuchen

- 28–1997 Harder, Jörn:  
Simulation lokaler Fliessvorgänge in Polykristallen
- 29–1997 Lewerenz, Malte Christian:  
Zur numerischen Behandlung von Werkstoffmodellen für zeitabhängig plastisches Materialverhalten
- 30–1997 Meywerk, Martin:  
Stabilität und Verschleiss bei auf Schienen laufenden Eisenbahnraden
- 31–1997 Plagge, Frank:  
Nichtlineares, inelastisches Verhalten von Spiralseilen
- 32–1997 Neubert, Michael:  
Richtungsregelung beim Tiefbohren
- 33–1998 Sangi, Daryoush:  
Die Versetzungsstrukturbildung in Metallen
- 34–1998 Thielecke, Frank:  
Parameteridentifizierung von Simulationsmodellen für das viskoplastische Verhalten von Metallen - Theorie, Numerik, Anwendung -
- 35–1998 Vietgen, Jürgen:  
Numerische Simulation duktilen Risswachstums unter Berücksichtigung von Schädigung
- 36–1998 Lär, Bernard:  
Einfluss transientsrer Anregungen auf die Zylinderkopf-Akustik
- 37–1998 Scheld, Christian:  
Auswirkungen dynamischer Interaktionen auf das Schwingungsverhalten von Tanks
- 38–1999 Baaran, Jens:  
Schallfeldanalyse bei sich bewegenden schallerzeugenden Körpern
- 39–1999 Daros, Carlos:  
Wellenausbreitung in unendlich ausgedehnten piezoelektrischen Medien mit transversal isotroper Symmetrie
- 40–2000 Wagner, Nils:  
Untersuchung der Boden-Fahrzeug-Interaktion mit gekoppelten Rand- und Finite-Element-Methoden
- 41–2001 Langer, Sabine:  
Schalltransmission durch Isolierverglasung
- 42–2001 Schacht, Thomas:  
Orientierungsabhängige Rissbildung in duktilen Metallen
- 43–2002 Ackerman, Lutz:  
Simulation der Schalltransmission durch Wände

- 
- 44–2002 Barthold, Franz-Joseph:  
Zur Kontinuummechanik inverser Geometrie Probleme
- 45–2002 Böhrnsen, Jens-Uwe:  
Dynamisches Verhalten von Schüttgütern beim Entleeren aus Silos
- 46–2002 Zorn, Christoph:  
Plastisch instabile Verformung aufgrund dynamischer Reckalterung und korrelierten Versetzungsgleitens
- 47–2002 Küsel, Michael:  
Wellige Verschleissmuster auf Laufflächen von Eisenbahnrädern
- 48–2002 Bross, Sebastian:  
Versetzungsdynamik und Reckalterung als Ursache instabilen Materialverhaltens beim Portevin-Le Chatelier-Effekt
- 49–2002 Vesper, Matthias:  
Modellierung von Korn und Korngrenze in polykristallinen Gefügen
- 50–2003 Steindorf, Jan:  
Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur Wechselwirkung
- 51–2003 Meyer, Marcus:  
Reduktionsmethoden zur Simulation des aeroelastischen Verhaltens von Windkraftanlagen
- 52–2003 Wittich, Hauke:  
Inhomogene Gleitung bei nahgeordneten CuAl-Legierungen
- 53–2003 Hupfer, Knut:  
Einfluss der Mikrostruktur auf die Festigkeitseigenschaften von Metallschäumen
- 54–2004 Schmelzer, Martin:  
Identifikation der Parameter von Zeitbereichsmodellen linear-viskoelastischer Werkstoffe
- 55–2004 Ostendorf, Michael:  
Geschwindigkeitsmessungen in Silos mit der Particle Image Velocimetry
- 56–2004 Engelhardt, Marek:  
Numerische Verfahren zur Identifizierung von Fehlstellen aus Randdaten
- 57–2005 Keese, Andreas:  
Numerische Lösung von Systemen mit stochastischen Unsicherheiten - Ein allgemeiner Rahmen für Stochastische Finite Elemente
- 58–2005 Pryl, Dobromil:  
Einfluss der Poroelastizität auf die Wellenausbreitung: Eine zeitabhängige Randelementformulierung

- 59–2005 Fries, Thomas-Peter:  
Ein stabilisiertes und gekoppeltes netzfreies/netzbasiertes Verfahren für Fluid-Struktur Interaktionsprobleme
- 60–2006 Kayser-Herold, Oliver:  
Least-Squares Methoden zur Lösung von Fluid-Struktur-Interaktionsproblemen
- 61–2006 Hampel, Sebastian:  
Numerische Simulation der Schallausbreitung unter Berücksichtigung meteorologischer Einflüsse
- 62–2007 Struckmeier, Vera:  
A Computational Model for Seismically induced Liquefaction
- 63–2007 Borsutzky, Robert:  
Seismic Risk Analysis of Buried Lifelines